



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**  
**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A**  
**BIOMECHANIKY**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## **METODY REKONSTRUKCE PRUTOVÉ SOUSTAVY**

METHODS FOR RECONSTRUCTION OF THE BAR SYSTEM

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**JAN KOUŘIL**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. ZDENĚK FLORIAN, CSc.**

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2010/2011

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Jan Kouřil

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Metody rekonstrukce prutové soustavy**

v anglickém jazyce:

### **Methods for reconstruction of the bar system**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem bakalářské práce je posoudit možnosti rekonstrukcí prutových soustav. Posouzení bude zaměřeno na přidávání prutů, případně jiných prvků s následným řešením a deformačně napěťovou analýzou.

Cíle bakalářské práce:

1. Provedení rešerše dostupné literatury v oblasti řešeného problému.
2. Vypracování přehledu metod pro řešení prutových soustav.
3. Posoudit možnosti rekonstrukcí prutových soustav.
4. Na vybraných prutových soustavách provést řešení po jejich rekonstrukci.

Seznam odborné literatury:

- [1] Juliš, K., Brepta, R. a kol: Mechanika I. Díl, Praha, SNTL, 1986
- [2] Binder, R.: Statika, Bratislava SVTL 1959
- [3] Štrejtr, J.: Technická mechanika I, Praha SNTL 1954

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Zdeněk Florian, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 2.11.2010

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato práce je zaměřena na způsoby rekonstrukce prutových soustav. Účelem práce je porovnat a vyhodnotit pohyblivost a změnu zatížení v prutech při změně prutové konstrukce. Také jsou zde provedeny metody pro výpočet prutové soustavy. Veškeré rekonstrukce a výpočty jsou prováděny na jednoduché mostní příhradové konstrukci. V závěru práce byl použit program ANSYS k zobrazení deformace a zatížení rekonstruované soustavy.

## **ABSTRACT**

This work is focused on ways of reconstruction bar systems. The purpose of the study is to compare and evaluate the mobility and load change in the bars in case of change the bar structure. There are also carried out the methods for calculating the bar system. All reconstructions and calculations are performed on a simple truss bridge construction. ANSYS software was used to view the reconstructed deformation and loading system at the end of work.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Příhradová konstrukce, prutová konstrukce, rekonstrukce soustavy, pohyblivost soustavy

## **KEYWORDS**

Truss construction, bar construction, reconstruction system, mobility system

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

KOUŘIL, Jan. Metody rekonstrukce prutových soustav. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011 80 s. Vedoucí práce Ing. Zdenek Florian, CSc..



## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Metody rekonstrukce prutových soustav vypracoval samostatně s pomocí vedoucího práce, odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu.

V Brně dne:.....

.....

Jan Kouřil



## **PODĚKOVÁNÍ**

V tomto odstavci bych chtěl především poděkovat vedoucímu mého bakalářského práce panu Ing. Zdeňku Florianovi Csc. za velmi cenné rady a připomínky, též za jeho ochotu a obětavost. Dále bych chtěl poděkovat mému kolegovi Martinu Lamrichovi za drobné postřehy, týkající se problematiky a samozřejmě mému rodině za podporu mého studia.





**OBSAH:**

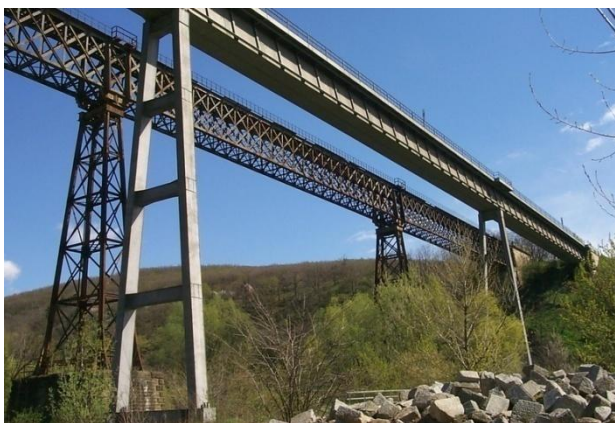
1. Úvod.....	13
1.1. Příhradová a prutová konstrukce .....	13
1.2. Výhody a nevýhody konstrukce .....	15
2. Rešerše .....	17
3. Způsob rekonstrukce prutové soustavy .....	19
3.1. Změna prutové konstrukce.....	19
3.2. Změna zatížení při začlenění zesilujícího prutu .....	20
4. Mezní stav vzpěrné stability .....	25
4.1. Vzpěrná únosnost prutu .....	26
4.2. Ideální tlakové namáhání ideálního prutu .....	26
4.3. Odchyłky od ideálního případu .....	28
5. Rekonstrukce prutové soustavy .....	32
5.1. Základní konstrukce.....	32
5.2. Pohyblivost soustavy .....	33
5.2.1. Metody určení pohyblivosti.....	33
5.2.2. Úpravy prutových soustav a důsledky na jejich pohyblivost a namáhání .....	34
5.2.2.1. Varianta a) Odebrání prutu 6 .....	35
5.2.2.2. Varianta b) Odebrání prutu 9 .....	36
5.2.2.3. Varianta c) Odebrání prutu 3 .....	37
5.2.2.4. Varianta d) Odebrání prutu 7 .....	38
5.2.2.5. Varianta e) Odebrání prutu 5 .....	39
5.3. Způsoby rekonstrukce.....	40
5.3.1. Výjimekové podepření.....	40
5.3.2. Náhrada prutu (Přidávání a odebírání prutu) .....	43
5.4. Řešení rekonstruované soustavy.....	45
5.4.1. Rozbor soustavy.....	46
5.5. Styčnicková metoda (obecná) .....	47
5.6. Styčnicková metody (postupná).....	48
5.6.1. Postup.....	48
5.7. Cremonova metoda.....	50

5.7.1.	Postup.....	50
5.8.	Průsečná metoda (Ritter) .....	52
5.8.1.	Postup.....	53
5.9.	Průsečná metoda (Culmann) .....	55
5.9.1.	Postup.....	55
5.10.	Metoda náhradního prutu (Henneberg).....	57
5.10.1.	Postup.....	57
5.11.	Metoda neurčitého měřítka .....	61
5.11.1.	Postup.....	62
6.	Metoda konečných prvků (MKP).....	67
6.1.	Řešení soustav .....	67
6.1.1.	Výpočet konstrukce se zavedeným třetím pásem .....	68
6.1.2.	Staticky neurčitá konstrukce .....	71
6.1.2.1.	Numerické řešení .....	72
6.1.2.2.	Analytické řešení .....	73
	Závěr.....	77
	Seznam použitých zdrojů .....	78
	Seznam použitých veličin.....	80

# 1. Úvod

Příhradová konstrukce byla v minulém století velice uplatňována ve strojírenském a stavebním průmyslu. Největší uplatnění získala v mostových a jeřábových konstrukcích, stožárech, věžích, stropnicích v halách atd. Hlavním důvodem využívání těchto typů konstrukce je jejich snadná aplikace, jak bude ukázáno v hlavní části této práce. Dalším důvodem byl malý pokrok v oblasti informační technologie a také malá znalost v jiných druhů konstrukce (skořepiny, stěny, desky). Tudíž nebylo možné řešit složité provedení konstrukce, které byly namáhány na krut nebo ohyb.

V dnešní době se příhradová konstrukce rozšířila i do staveb výškových budov nebo vysokokapacitních stadionů. Prutová konstrukce se také využívá v designérském průmyslu.



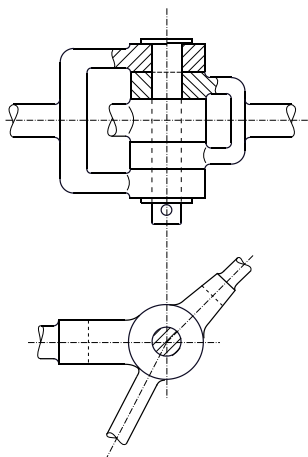
Obr. 1. Ivančický viadukt [7]



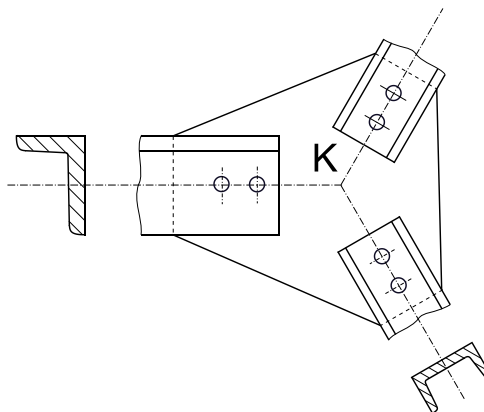
Obr. 2. Autobusové nádraží – Zvonařka [8]

## 1.1. Příhradová a prutová konstrukce

Za příhradovou konstrukci považujeme sestavu sestavenou ze štíhlých elementů (prutů), které jsou vzájemně spojeny na svých koncích. Aby byl prut považován za součást příhradové konstrukce, musí být na obou koncích spojen s jiným prutem. Elementy mívají konstantní průřezy, které mohou být ve tvaru kruhovém, trubkovém, tvarovém profil L, T, C, I apod. Spojení elementů se v praxi provádí různými způsoby, které mohou být lepené, nýtované, svařované atd. Takovéto spojení musí být provedeno tak aby se osy prutů protínaly v jednu bodě. [5]



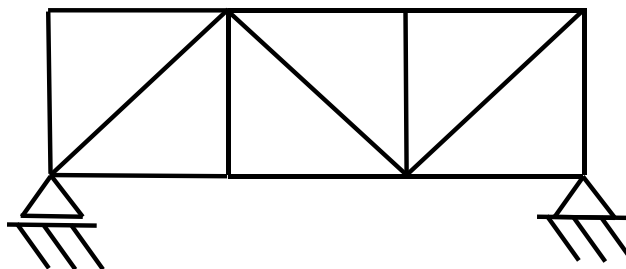
Obr. 3. Kloubové spojení [3]



Obr. 4. Nýtové spojení [3]

Prutová soustava je výpočtový model příhradové konstrukce. Prutová soustava je vymezená jako soustava složená z prutů, která je spojena klouby ve styčnicích. V reálu však příhradová konstrukce, jak bylo uvedeno výše, neodpovídá kloubovému spoji, který představuje prutová konstrukce. Tato odlišnost se může i nemusí příliš projevit v teoretickém výpočtu od praktického napětí elementů příhradoviny. Větší odchylky teoretických výpočtů od praktických by mohli být způsobeny, tím že pružná deformace zatížených prutů významně změni původní tvar geometrie nezatížené konstrukce. Při změně tvaru dochází k mimosovému zatížení, které vyvolá nežádoucí zatížení ohybem nebo krut. V praxi rovněž není možné vždy zatěžovat konstrukci ve styčniku. Takovým zatížením vždy bývá vlastní tíha konstrukce. Ve většině případů je vliv gravitační tíhy několikanásobně menší než zatěžující síla. Nicméně konstruktéři nesmí toto zatížení ignorovat a ujistit se zda gravitační tíha nevyvolá takové zatížení, které by mohlo narušit vlastní únosnost konstrukce. [5]

Pruty v konstrukci rozdělujeme na jednotlivé pásy. Tak např. na obrázku 5 máme znázorněné *přímé horní a dolní pásy*. Pruty, které pásy vyplňují, nazýváme *výplňové* nebo *mezipásové*. Tyto pruty dále rozlišujeme dle jejich výplně, na *svislice* nebo *příčky* (diagonály). Někdy se také říká výztuži mezi pásy *příhradovina*. Dle používání pojmu příhrady, popřípadě příhradového ztužení konstrukce se v technické praxi ujal název *příhradová konstrukce*.



Obr. 5. Prutová soustava

Podle geometrického uspořádání rozdělujeme konstrukce na *rovinné* a *prostorové*.

Styčníky rozlišujeme, podle počtu připojených prutů, na dvojné, trojné apod., styčníky v místě uložení tělesa nazýváme *podporné*. [2]

## 1.2. Výhody a nevýhody konstrukce

Realizace takových konstrukcí má v určitých podmínkách výhodu oproti jinému provedení.

Hlavními výhodami jsou: [1]

- využití konstrukcí s velkým rozpětí, které umožňují velkého prostoru bez podpěry uprostřed stavby. Takové využití je například při stavbě zastřešených velkokapacitních stadiónů.
- Lehká ocelová konstrukce, kde je využito prvků převládajících délkovým rozměrem. Vzhledem k tomu, snižuje hmotnost konstrukce a následně značná úspora nákladů.
- Konstrukci lze rychleji postavit než betonovou konstrukci. Tohoto uplatnění se využívá při stavbě výškových budov nebo stavění lešení na opravy budov a jiných staveb.
- Konstrukce je odolná proti požáru.

I když tato konstrukce oponuje mnoha význačnými výhodami, má také i své proti.

Hlavními nevýhodami jsou: [6]

- Tradiční příhradová konstrukce ponechává velký nepoužitelný objemový prostor.
- Konstrukce je dimenzována pouze na tah a tlak.
- Obtížná změna konstrukce
- Zapotřebí velkého postranního rozpětí
- Konstrukce je citlivá na vibrace

- Vysoký podíl lidské práce na vybudování konstrukce
- Veškeré sílové zatížení musí působit ve styčnících.

## **2. Rešerše**

### **STATIKA**

Autor: Zdeněk Florian, Emanuel Ondráček, Karel Přikryl.

V těchto skriptech je popis prutových soustav z hlediska statického určení a kinematický rozboru soustavy.

### **MECHANIKA TĚLES – Pružnost a pevnost I**

Autor: Přemysl Janíček, Emanuel Ondráček, Jan Vrbka, Jiří Burša.

Ve skriptech je všeobecný popis pro namáhání prutových těles na vzpěry. Také je zde popis pro řešení staticky neurčitých soustav.

### **STATIKA**

Autor: Karel Juliš, Otakar Tepřík, Adolf Slavík.

Práce na straně 121 – 127 pojednává o vytváření prutových soustav, statické určitosti a výjimečném případě. Na dalších stranách jsou vysvětleny metody řešení prutových soustav.

### **STATIKA STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ I.**

Autor: Jaroslav Kadlčák, Jiří Kytýř

V této knize je v určitých kapitolách popsána příhradová konstrukce ve výjimečném případě, kinetické určitosti, neurčitosti a pře určitosti. Jsou zde také určité metody řešení prutových soustav.



**TECHNICKÁ MECHANIKA**

Autor: Josef Šrejtr

Na stranách 260 – 267 jsou popsány způsoby spojený prutů v příhradových konstrukcích.

Také jsou zde vytvářeny a popsány výjimečné případy prutových soustav.

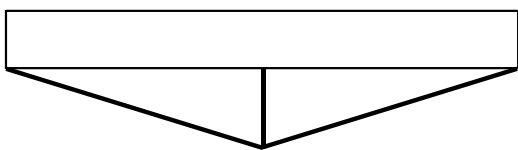
### 3. Způsob rekonstrukce prutové soustavy

Každá konstrukce nemá v reálu neomezenou životnost. Proto aniž by se musela celá konstrukce demontovat, využívají se metody rekonstrukce prutových soustav. Taková rekonstrukce se docílí změnou prutové konstrukce.

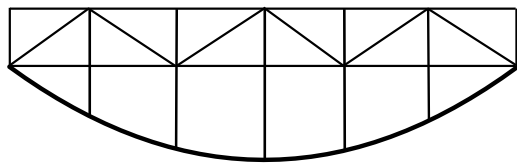
#### 3.1. Změna prutové konstrukce

Dosazení nových prutů nebo konstrukčních prvků při rekonstrukci provádíme tak, aby doplnění bylo co nejhospodárnější ke stávající prutové konstrukci. Konstrukční dílce lze konstruovat i dosazování dalších pásů, horní nebo dolní, na způsob výstužných oblouků, vzpínadel nebo věšadel. V kapitole Metody konečných prvků bude provedeno zatížení rekonstruované soustavy (Obr. 6d.).

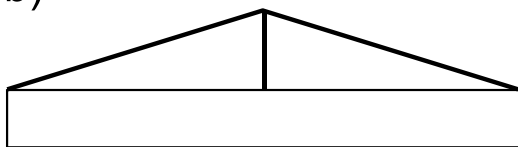
a)



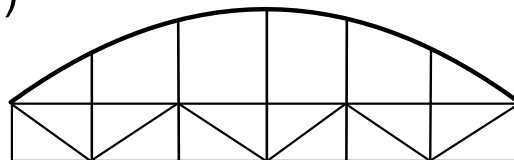
c)



b)



d)



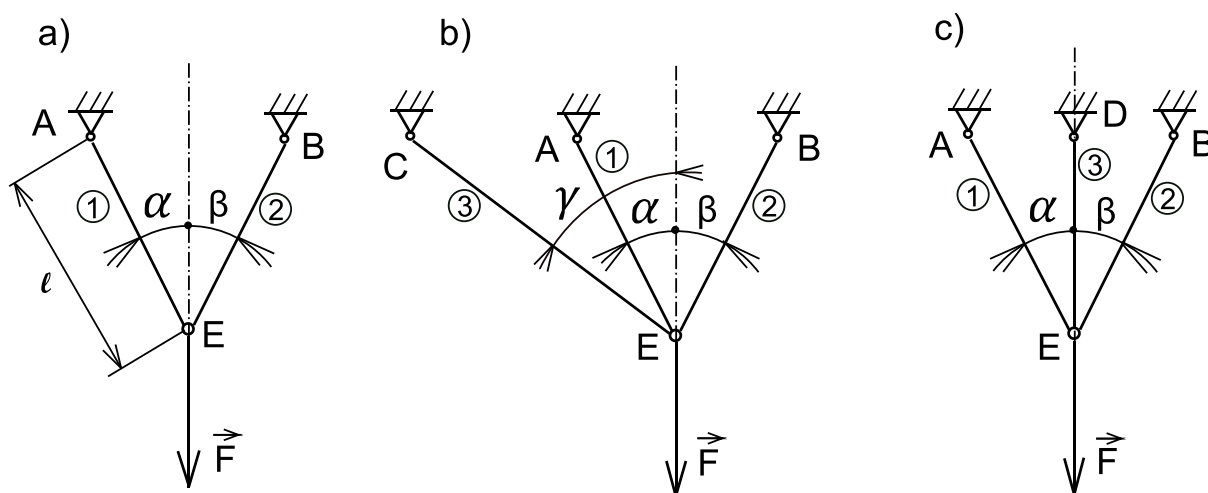
Obr. 6. Zavedení třetího pásu

Lze taky provést změnu vnější statické určitosti ke změně jejich statického působení, a to úpravou jejich vazeb nebo začlenění další vazeb v konstrukci.

Při změně statické určitosti především dosahujeme toho, aby daný prut byl při rekonstrukci odlehčen. Nesmíme opomenout, že při změně uspořádání prutů v konstrukci nastává i jiné zatížení jednotlivých prutů. Proto je nutné porovnat hodnoty napětí jednotlivých prutů před a po začlenění prvků do konstrukce. Při špatném dosazení prvků by mohlo dojít k překročení meznímu stavu pružnosti.

### 3.2. Změna zatížení při začlenění zesilujícího prutu

Začlenění prutů do soustavy můžeme provést několika způsoby. Začlenění dalších prutů do soustavy k rozložení zatížení, provádíme s cílem snížení namáhání prutů. V soustavě nedochází vždy ke snížení zatížení v jednotlivých členech soustavy. Proto na jednoduchém příkladu lze vidět rozdíl rozložení zatížení v jednotlivých prutech, což prokážeme na jednoduchém příkladu.



Obr. 7. Úprava soustavy

#### Varianta a):

Na obrázku 7a) je zobrazena výchozí prutová soustava, která je staticky určitá a je zatížena silou  $\vec{F}$ .

#### Klasifikace vazeb:

$$A - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$B - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$E - r.k.d. - \xi_i = 2$$

#### Určení pohyblivosti:

Počet členů + základní těleso:

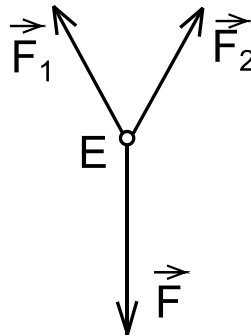
$$n = 3$$

Počet omezení deformačních parametrů:

$$\eta = 0$$

$$i = (n - 1)i_v - (\Sigma \xi_i - \eta) = (3 - 1)3 - (2 + 2 + 2 - 0) = 0$$

**Uvolnění prvků soustavy:**



$$F_x: -F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = 0$$

$$F_y: F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta - F = 0$$

$$F_1 = F_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$F_2 \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + F_2 \cos \beta = F$$

V důsledku symetrie,  $\alpha = \beta = 30^\circ$ , soustavy mají síly v prutech stejnou velikost.

$$F_1 = F_2 = 0,577F$$

**Varianta b):**

Variantu b) obdržíme doplněním prutu 3 do varianty a) viz obr. 7b. Následně určíme změnu velikosti sil v jednotlivých prutech.

**Klasifikace vazeb:**

$$A - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$B - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$C - r.k.d. - \xi_i = 2$$

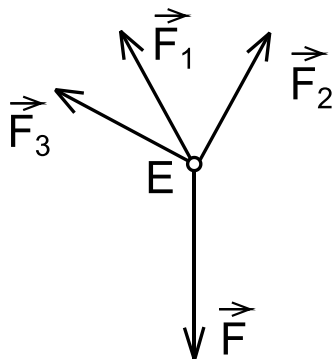
$$E - r.k.d. - \xi_i = 2$$

**Určení pohyblivosti:**

$$\text{Počet členů + základní těleso:} \quad n = 4$$

$$\text{Počet omezení deformačních parametrů:} \quad \eta = 1$$

$$i = (n - 1)i_v - (\Sigma \xi_i - \eta) = (4 - 1)3 - (2 + 2 + 2 + 2 - 1) = 0$$

**Uvolnění prvků soustavy:**

Počet neznámých parametrů:

$$\mu = 3$$

Počet použitelných rovnic:

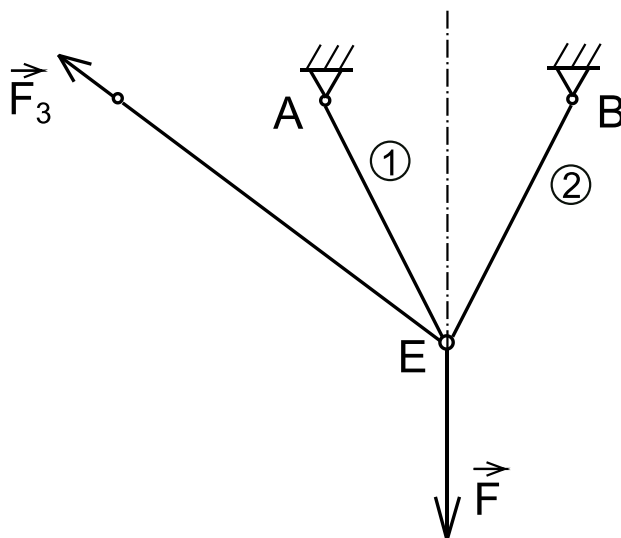
$$v = 2$$

$$\mu \neq v \Rightarrow s=1^\circ \text{ (statická neurčitost)}$$

**Statická rovnováha:**

$$F_x: -F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta - F_3 \sin \gamma = 0$$

$$F_y: F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma - F = 0$$

**Částečné uvolnění:**

Deformační podmínka:

$$u_C = 0$$

$$u_C = \frac{\partial W}{\partial F_3} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{ES_i} F_i \frac{\partial F_i}{\partial F_3} = 0$$

Vyjádření sil ze statické rovnováhy:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{F \sin \beta - F_3 \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}; & \frac{\partial F_1}{\partial F_3} &= -\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ F_2 &= \frac{F \sin \alpha - F_3 \sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}; & \frac{\partial F_2}{\partial F_3} &= -\frac{F_3 \sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ F_3 &= F_3; & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} &= 1 \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice  $\alpha, \beta = 30^\circ$ ;  $\gamma = 60^\circ$ , obdržíme rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{l}{ES} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} F - \frac{4\sqrt{3}}{3} F_3 \right) \left( -\frac{4\sqrt{3}}{3} \right) + \frac{l}{ES} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} F + \frac{\sqrt{3}}{3} F_3 \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}l}{ES} F_3 \cdot 1 &= 0 \\ F_3 &= \frac{3}{17 + 3\sqrt{3}} F \end{aligned}$$

**Výsledné hodnoty:**

$$F_1 = 0,46F; F_2 = 0,655F; F_3 = 0,135F$$

Z hodnot vyplývá, že toto provedení rekonstruovaného systému nepřinese odlehčení prutů. K tomu aby nedošlo k vyššímu namáhání prutu 2, by bylo potřeba snížit hodnotu zatěžovací síly. Po přepočtu by snížena síla byla rovna:

$$F_p = 0,865F$$

**Varianta c):**

Aby nedošlo ke zvýšení namáhání, zavedeme prut 3 pro odlehčení ve směru působící síly  $\vec{F}$ .

**Klasifikace vazeb:**

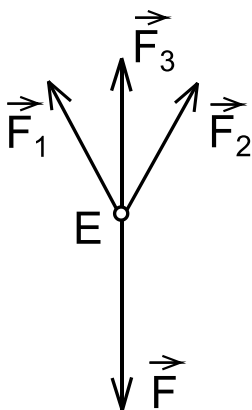
$$\begin{aligned} A - r.k.d. - \xi_i &= 2 \\ B - r.k.d. - \xi_i &= 2 \\ D - r.k.d. - \xi_i &= 2 \\ E - r.k.d. - \xi_i &= 2 \end{aligned}$$

**Určení pohyblivosti:**

$$\begin{aligned} \text{Počet členů + základní těleso:} & n = 4 \\ \text{Počet omezení deformačních parametrů:} & \eta = 1 \end{aligned}$$

$$i = (n - 1)i_v - (\sum \xi_i - \eta) = (4 - 1)3 - (2 + 2 + 2 + 2 - 1) = 0$$

**Uvolnění prvků soustavy:**



Počet neznámých parametrů:

$$\mu = 3$$

Počet použitelných rovnic:

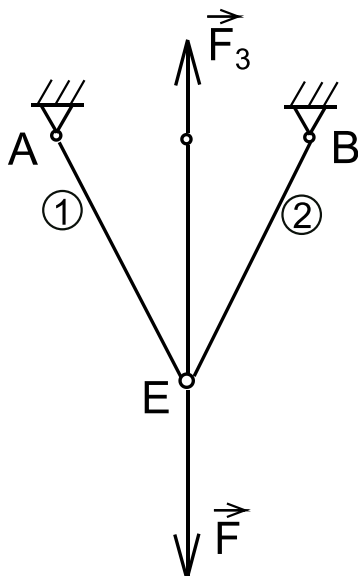
$$v = 2$$

$$\mu \neq v \Rightarrow s=1^\circ \text{ (statická neurčitost)}$$

$$F_x: -F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = 0$$

$$F_y: F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 - F = 0$$

**Částečné uvolnění:**



Deformační podmínka:

$$u_D = 0$$

$$u_D = \frac{\partial W}{\partial F_3} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{ES_i} F_i \frac{\partial F_i}{\partial F_3} = 0$$

Vyjádření sil ze statické rovnováhy:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{(F - F_3) \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; & \frac{\partial F_1}{\partial F_3} &= -\frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \\ F_2 &= \frac{(F - F_3) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; & \frac{\partial F_2}{\partial F_3} &= -\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ F_3 &= F_3; & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} &= 1 \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice  $\alpha, \beta = 30^\circ$ , obdržíme rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{l}{ES} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} F - \frac{\sqrt{3}}{3} F_3 \right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \frac{l}{ES} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} F - \frac{\sqrt{3}}{3} F_3 \right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}l}{2ES} F_3 \cdot 1 &= 0 \\ F_3 &= \frac{12\sqrt{3} - 16}{11} F \end{aligned}$$

**Výsledné hodnoty:**

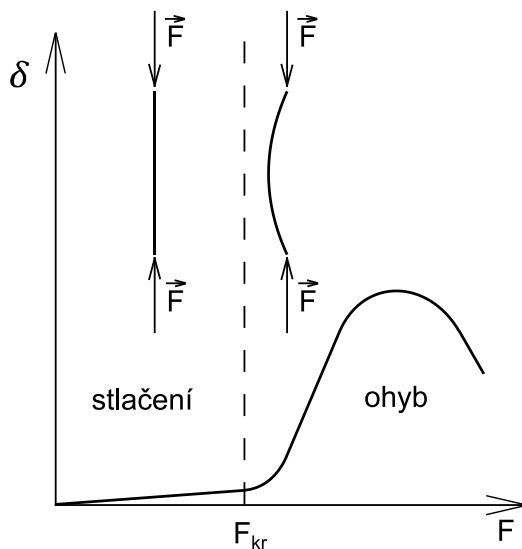
$$F_1 = F_2 = 0,329F; F_3 = 0,435F$$

Při začleňování zesilujícího prutu v obou variantách vždy dochází k odlehčení rekonstruovaného prutu. Ovšem zesilující prut ovlivňuje celou soustavu, proto je důležité kontrolovat zatížení celé soustavy. Při špatném vložení prutu může dojít přetížení konstrukce.

## 4. Mezní stav vzpěrné stability [10]

U prutů, které jsou namáhány na tlak, může malá deformace značně ovlivnit velikost napětí. V takovém případě nejsou deformace přímo úměrné zatížení. V počáteční fázi zatížení prutu dochází ke stlačování střednice. Od určitého okamžiku velikosti zatížení dochází k vybočení střednice a nastává podstatná změna namáhání. Dominantní napjatostí se stane ohyb a prut se začne ohýbat. Rozhraní těchto dvou stavů nazýváme *mezní stav vzpěrné stability*.





Obr. 8. Mezní stav vzpěrné stability [10]

#### 4.1. Vzpěrná únosnost prutu

Příhradovou konstrukci pro vzpěrnou únosnost musíme navrhovat podle normy ČSN EN 1993-1-1 Navrhování ocelových konstrukcí. Tlačené pruty, podle normy, jsou na vzpěry posuzovány podle vztahu:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1,0$$

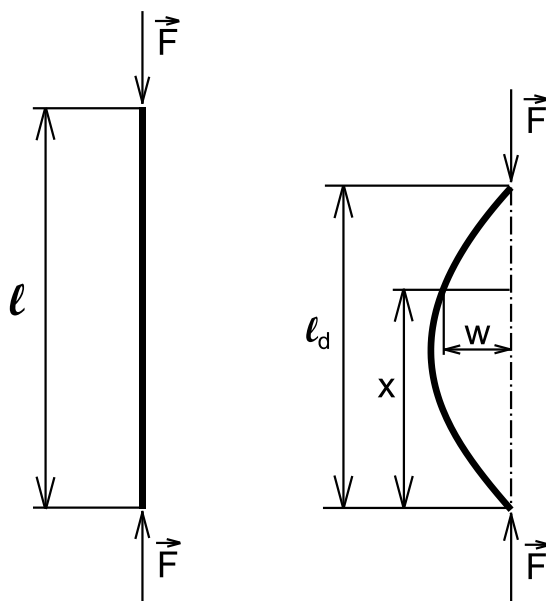
kde,  $N_{Ed}$  je návrhová hodnota tlakové síly

$N_{b,Rd}$  návrhová vzpěrná únosnost tlačeného prutu.

#### 4.2. Ideální tlakové namáhání ideálního prutu

Uvažujeme tento případ volného prutu namáhaného na tlak, když:

- střednice prutu při nezatíženém stavu je ideálně přímá,
- prut je nešroubovítý a prizmatický,
- prut je zatížen dvěma stejnými osamělými silami  $F$ , jejichž nositelka je totožná se střednicí prutu,
- materiál prutu je homogenní, lineárně pružný a dokonale pevný,
- v celém průběhu zatěžování platí předpoklad prostého namáhání prutu.



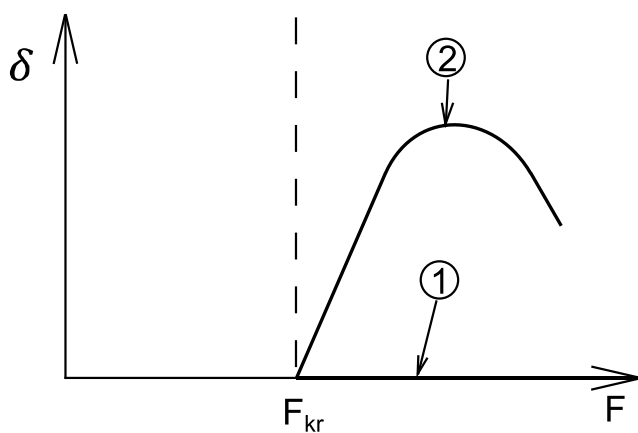
Obr. 9. Ideální tlakové namáhání ideálního prutu [10]

Výpočet kritické síly pro ideální případ přímého, prizmatického, nešroubovitého, nekonečně pevného, lineárně pružného prutu ležícího přímo v ose řešíme vztahem:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_y(x)}{EJ_y}; \quad \frac{1}{R} = \frac{w''(x)}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

Jde o nelineární diferenciální rovnici druhého řádu, která má řešení  $w = w(F, x, c_1, c_2)$ , k určení integračních konstant  $c_1$  a  $c_2$  musíme napsat okrajové podmínky, které mají podle obr. 9. tvar:

$$x = 0 \rightarrow w = 0; \quad x = l_d \rightarrow w = 0$$

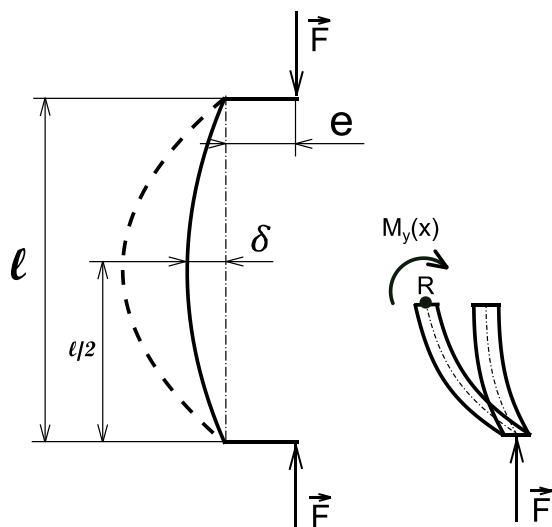


$F \leq F_{kr}$  jedno řešení  
 $F \geq F_{kr}$  dvě řešení  
 1 – nestabilní stlačení  
 2 – stabilní ohyb (labilní stlačení)  
 $F = F_{kr}$  bod rozdělení rovnováhy

Obr. 10. [10]

### 4.3. Odchylny od ideálního případu

Střednice je před zatížením zakřivená a síla působí excentricky



Obr. 11. [10]

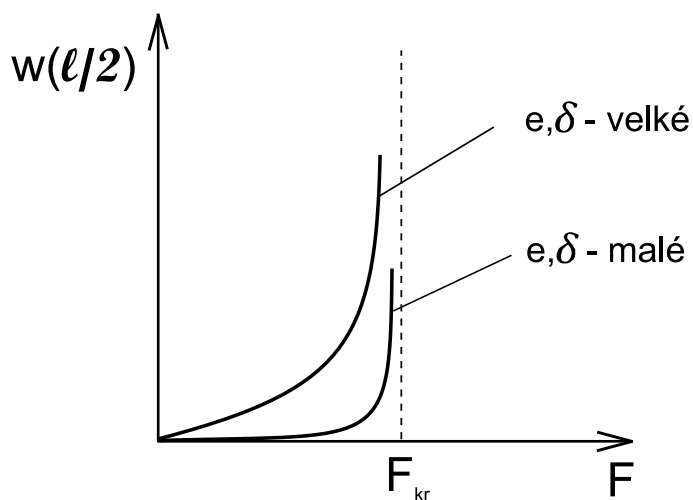
Počáteční průhyb vyjádřen vztahem:

$$w_0(x) = \delta \sin \frac{\pi}{l} x$$

Ohybový moment:

$$M_y(x) = F[e + w_0(x) + w(x)]$$

$$EJ_y w''(x) = F[e + w_0(x) + w(x)]$$



Obr. 12. [10]

V tomto případě mezní stav vzpěrné stability nenastává, prut se ohýbá už od začátku.

#### Vliv proměnlivosti průřezu a modulu pružnosti E

Při proměnlivém průřezu rozdělíme prut na úseky s různými kvadratickými momenty (Obr. 12). Následně je průhyb popsán vztahy:

$$w_I = c_1 \sin p_I x + c_2 \cos p_I x$$

$$p_I = \sqrt{\frac{F}{EJ_I}}$$

$$w_{II} = c_3 \sin p_{II} x + c_4 \cos p_{II} x \qquad p_{II} = \sqrt{\frac{F}{EJ_{II}}}$$

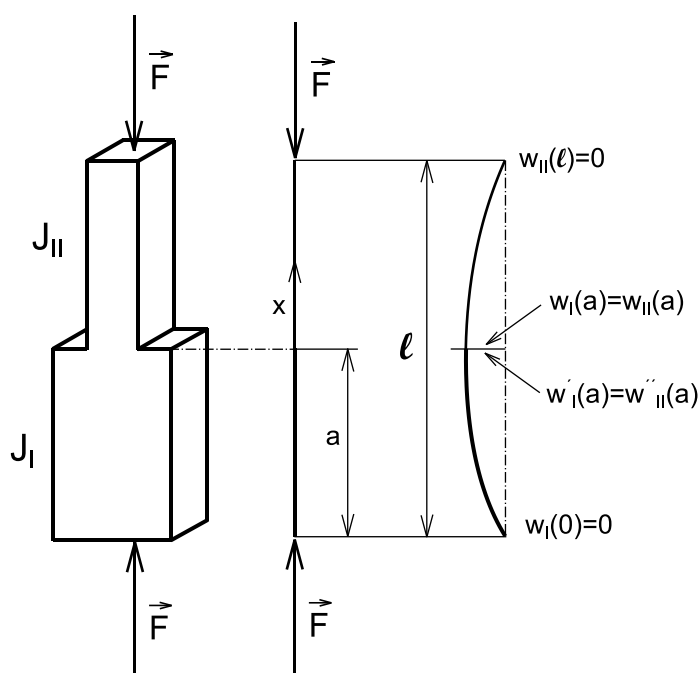
přičemž musí být splněny okrajové podmínky:

$$w_I(0) = 0; w_{II}(l) = 0$$

uložení konců prutu

$$w_I(a) = w_{II}(a); w'_I(a) = w'_{II}(a)$$

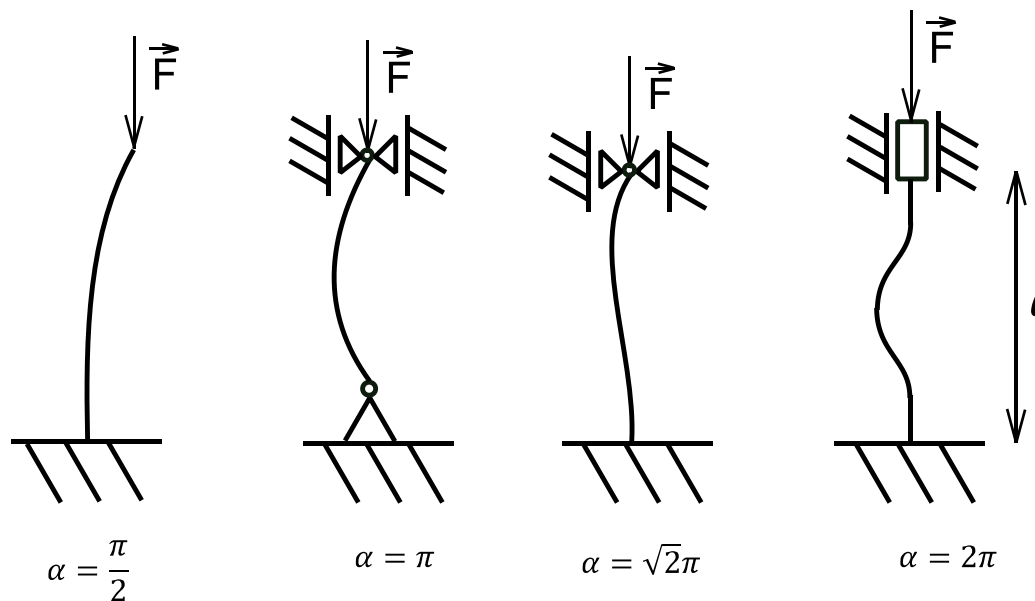
spojitost a hladkost střednice



Obr. 13. [10]

Pokud je prut odlišný pouze proměnlivým modulem  $E$  nebo průřezem prutu, tak že se nemění poloha hlavní osy od střednice, pak bod rozdělení rovnováhy existuje a kritická síla  $F_{kr}$  je funkcí závislosti  $EJ = f(x)$ .

### Vliv uložení prutu



Obr. 14. Uložení prutů

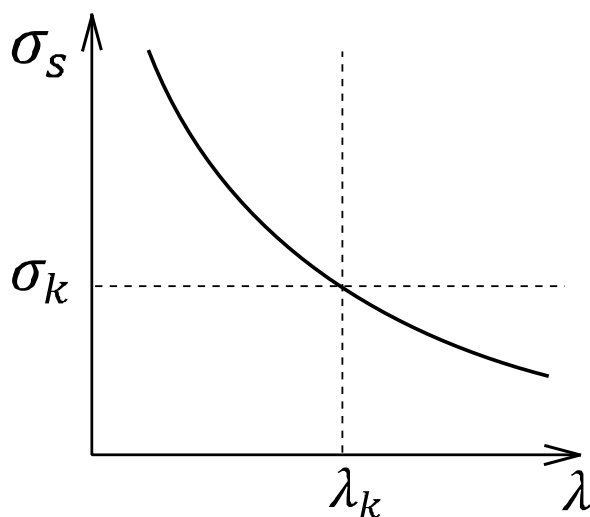
$$F_{kr} = \frac{\alpha^2 E J_y}{l^2}$$

### Vliv reálného pružně plastického materiálu

Mezi množinou teoreticky možných mez stavů se realizuje ten, který nastává při minimálním zatížení. U stlačeného prutu může nastat mezní stav pružnosti a resp. mezní stav vzpěrné stability.

$$F_{kr} = \frac{\alpha^2 E J_y}{l^2}$$

$$\sigma_s = \frac{F_{kr}}{S} = \frac{\alpha^2 E J_y}{l^2 S} = \frac{\alpha^2 E S i_y^2}{l^2 S} = \frac{\alpha^2 E}{\left(\frac{l}{i_y}\right)^2} = \frac{\alpha^2 E}{\lambda^2}$$

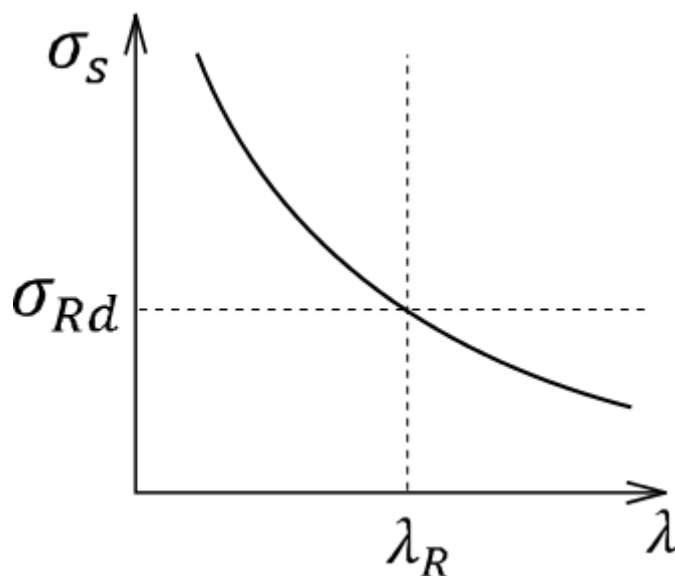


Obr. 15. Materiál ve stavu tvárném

$$\sigma_k = \sigma_s; \sigma_k = \frac{\alpha^2 E}{\lambda_k^2} \rightarrow \lambda_k = \sqrt{\frac{\alpha^2 E}{\sigma_k}}$$

$\lambda < \lambda_k$ ; Mezní stav pružnosti  $k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma}$

$\lambda \geq \lambda_k$ ; MSVS  $k_{kr} = \frac{F_{kr}}{F} \geq k_D (4 \div 5)$



Obr. 16. Materiál ve stavu křehkosti

$$\sigma_{Rd} = \sigma_s; \sigma_{Rd} = \frac{\alpha^2 E}{\lambda_R^2} \rightarrow \lambda_R = \sqrt{\frac{\alpha^2 E}{\sigma_{Rd}}}$$

$$\lambda < \lambda_R; \text{Mezní stav křehkosti } k_k = \frac{\sigma_{Rd}}{\sigma}$$

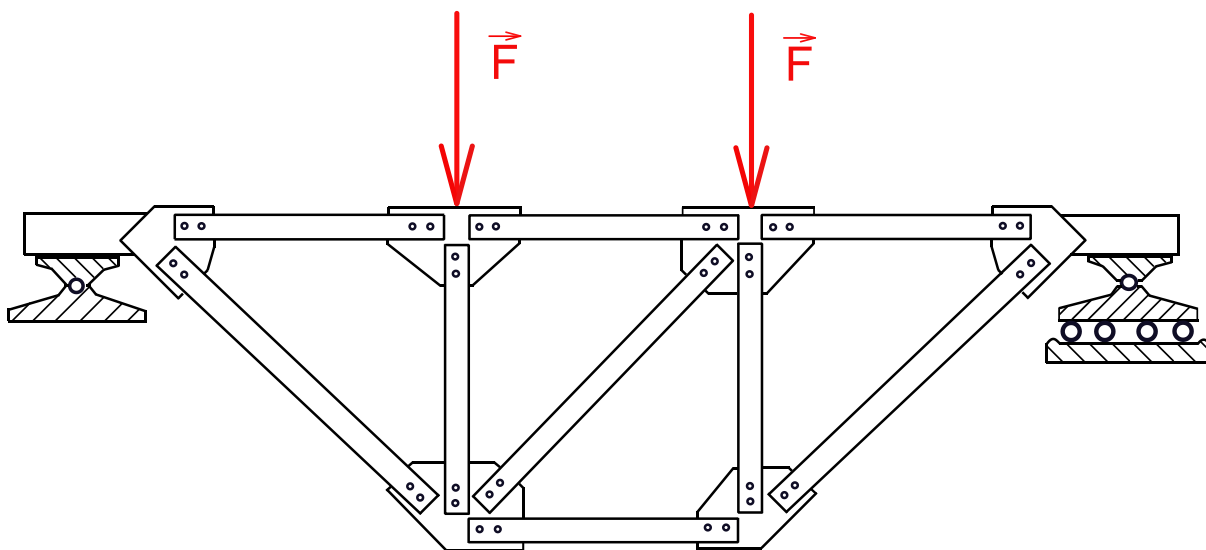
$$\lambda \geq \lambda_R; \text{MSVS } k_{kr} = \frac{F_{kr}}{F} \geq k_D (4 \div 5)$$

## 5. Rekonstrukce prutové soustavy

Rekonstrukce příhradové konstrukce bude analyzovaná na modelu prutové soustavy. Následně budou vybrány pruty, které budou vyjmuty ze soustavy. Po vyjmutí prutu budou do prutové soustavy začleněny prvky tak, aby provedení bylo co nejsnadnější a nedošlo při zatěžování ke zhroutení konstrukce.

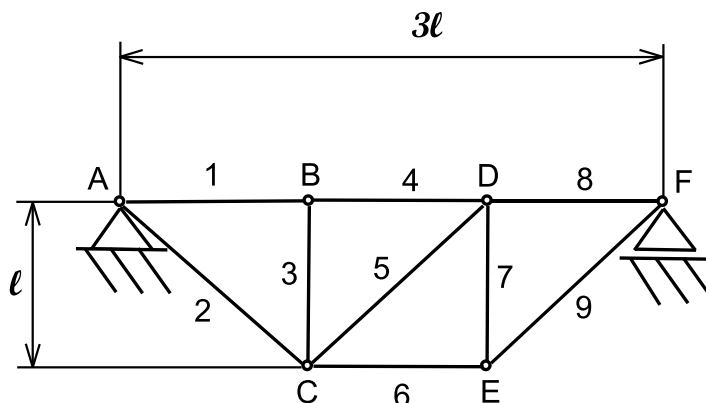
### 5.1. Základní konstrukce

K analýze byla vybrána jednoduchá mostní příhradová konstrukce, viz obr. 17. Uložení mostu můžeme modelovat rotační a obecnou vazbou. Zatížení příhradové konstrukce bude kolmé na horní pás konstrukce od horní mostovky.



Obr. 17. Základní konstrukce

Abychom mohli příhradový most modelovat jako prutové těleso, musí daná konstrukce splňovat jistá kritéria. Z předchozího obrázku lze vidět, že osy elementů se protínají v jednom bodě. Dalším kritériem je způsob zatěžování konstrukce. V teoretických výpočtech budeme dodržovat, aby zatěžovací síla působila na styčník. Pro lepší orientaci ve výpočtech označíme všechny styčníky a prutová tělesa (Obr. 18.).



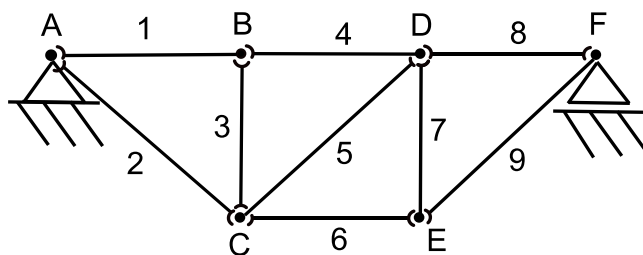
Obr. 18. Prutová soustava

## 5.2. Pohyblivost soustavy

Při změně základní prutové soustavy pro rekonstrukci, dochází ke změně vazeb a styčníků v soustavě. Proto je nutné vždy provádět kinematický rozbor soustavy. Při špatném provedení může dojít k tomu, že soustava se stane pohyblivou, tudíž nelze provést teoretický výpočet.

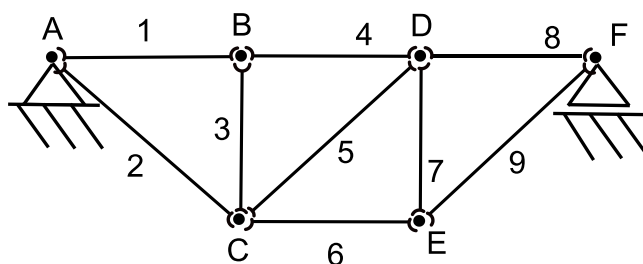
### 5.2.1. Metody určení pohyblivosti

Při určování pohyblivosti je nutné uvážit realizaci rotačních vazeb. Realizace rotačních vazeb u prutové soustavy může být provedena dvěma způsoby. U prvního způsobu je čep pevně spojen s jedním prutem. Viz obr. 19a



Obr. 19a. Realizace rotačních vazeb

U druhého způsobu čep tvoří samostatné styčnickové těleso. Viz obr. 19b



Obr. 19b. Realizace rotačních vazeb



**Určení pohyblivosti:****Varianta a):****Klasifikace vazeb:**

$$\begin{array}{ll}
 A - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2 & D - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 3 \\
 B - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2 & E - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2 \\
 C - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 3 & F - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 1
 \end{array}$$

Počet členů – prutů + základní těleso:  $p = 10$

$$\begin{aligned}
 i &= (p - 1)i_v - (\Sigma \xi_i - \eta) - \delta \\
 i &= (10 - 1)3 - (2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1) - 1 = 0
 \end{aligned}$$

**Varianta b):****Klasifikace vazeb:****Vnější vazby:**

$$\begin{array}{l}
 A - r.k.d. - \xi_i = 2 \\
 F - o.k.d. - \xi_i = 1
 \end{array}$$

**Vnitřní vazby:**

$$\begin{array}{l}
 A, F - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2 \\
 B, E - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2 \\
 C, D - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2
 \end{array}$$

**Určení pohyblivosti:**

$$\begin{array}{ll}
 \text{Počet styčníků:} & \delta = 6 \\
 \text{Počet členů – prutů + základní těleso:} & p = 10 \\
 \text{Celkem:} & n = 16
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 i &= (n - 1)i_v - (\Sigma \xi_i - \eta) - \delta \\
 i &= (16 - 1)3 - (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) - 6 = 0
 \end{aligned}$$

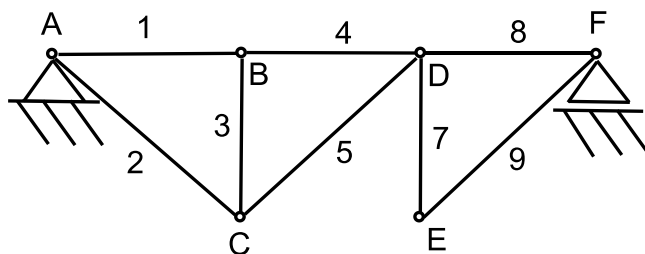
Při uvažování obou případů možné realizace rotačních vazeb vychází pohyblivost soustavy stejná, u zvoleného příkladu nulová.

### 5.2.2. Úpravy prutových soustav a důsledky na jejich pohyblivost a namáhání

Ideální stav rekonstrukce příhradových konstrukcí, by byl takový, kdyby nenastala pohyblivost soustavy a nadměrné přetížení ostatních členů. Z tohoto důvodu, u vybrané prutové konstrukce, viz obr. 18. se budeme zabývat stav, které budou nastávat po odebrání

jednotlivých prutů. Tyto stavy pak následně posoudíme z hlediska pohyblivosti soustavy a sil v prutech.

#### 5.2.2.1. Varianta a) Odebrání prutu 6



Obr. 20. Náčrt varianty a)

### Rozbor soustavy

#### Klasifikace vazeb:

##### Vnější vazby:

$A - r.k.d. - \xi_i = 2$

$F - o.k.d. - \xi_i = 1$

##### Vnitřní vazby:

$A, E, F - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$

$B, C - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2$

$D - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2$

#### Určení pohyblivosti:

Počet styčníků:

$$\delta = 6$$

Počet členů = prutů + základní těleso:

$$p = 9$$

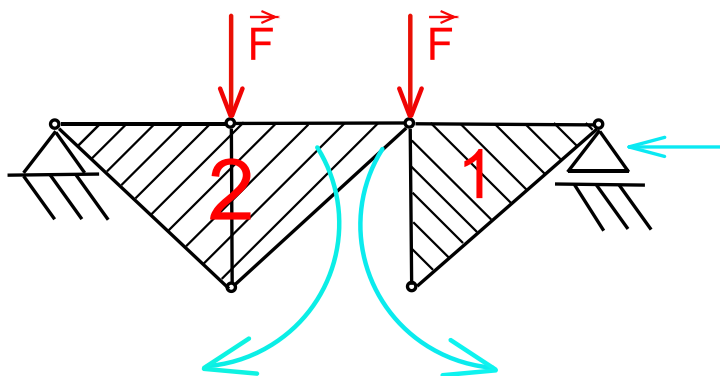
Celkem:

$$n = 15$$

$$i = (n - 1)i_v - (\sum \xi_i - \eta) - \delta$$

$$i = (15 - 1)3 - (3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) - 6 = 1$$

Při odstranění prutu 6, bez jakékoliv jiné úpravy, má soustava 1 stupeň volnosti. Dle obr. 21. dojde k rozdělení prutové soustavy na dvě podsoustavy, u kterých může dojít k pohybu, které mohou rotovat kolem vnějších vazeb.

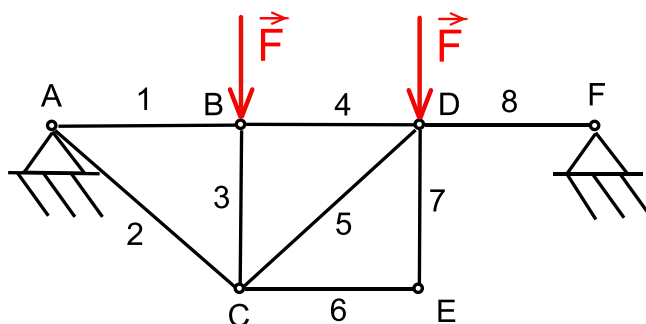


Obr. 21. Pohyb soustavy – varianta a)

#### 5.2.2.2. Varianta b) Odebrání prutu 9

Po odebrání prutu 9 se mění prutové těleso. Prutové těleso se nyní skládá z prutů 1-7. Prut 8 má nyní charakter vazby, která je v kombinaci s vazbou F vazbou nefunkční. Soustava je uložena pohyblivě.

Pokud s odebráním prutu 9 současně zamezíme u vazby F (rotační vazba) posuv ve vodorovném směru, obdržíme výjimečnou soustavu. Kombinace vazby A s vazbou prutem 8, odebírají oba posuvy v bodě A a deformační posuv prutů mezi body AF, neodebírají rotaci.



Obr. 22. Náčrt varianty b)

### Rozbor soustavy

#### Klasifikace vazeb:

##### Vnější vazby:

$$A - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$F - o.k.d. - \xi_i = 1$$

##### Vnitřní vazby:

$$A, E - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$$

$$B, D - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2$$

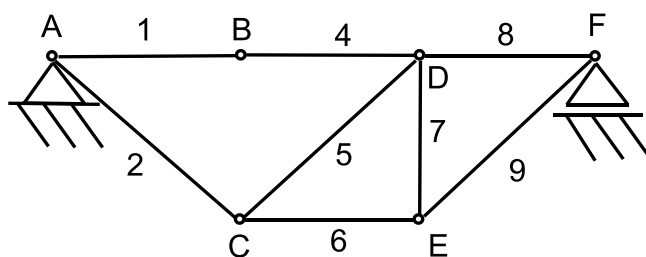
$$C - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2$$

**Určení pohyblivosti:**

Počet styčnicků:	$\delta = 5$
Počet členů = prutů + základní těleso:	$p = 8$
Celkem:	$n = 13$
Počet omezení deformačních parametrů:	$\eta = -1$

$$i = (n - 1)i_v - (\sum \xi_i - \eta) - \delta$$

$$i = (13 - 1)3 - (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1) - 5 = 1$$

**5.2.2.3. Varianta c) Odebrání prutu 3**

Obr. 23. Náčrt varianty c)

**Rozbor soustavy****Klasifikace vazeb:****Vnější vazby:**

$$A - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$F - o.k.d. - \xi_i = 1$$

**Vnitřní vazby:**

$$A, B, F - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$$

$$C, E - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2$$

$$D - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2$$

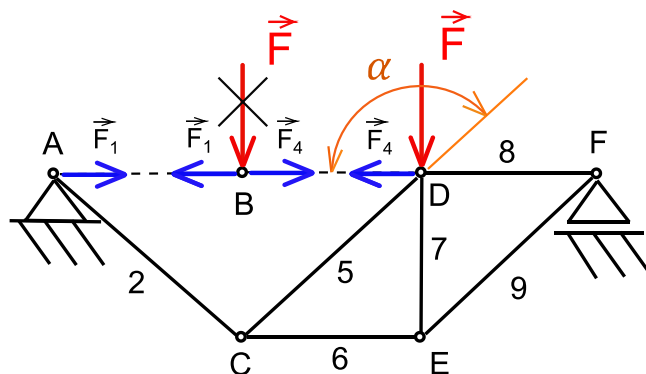
**Určení pohyblivosti:**

Počet styčnicků:	$\delta = 6$
Počet členů = prutů + základní těleso:	$p = 9$
Celkem:	$n = 15$

$$i = (n - 1)i_v - (\sum \xi_i - \eta) - \delta$$

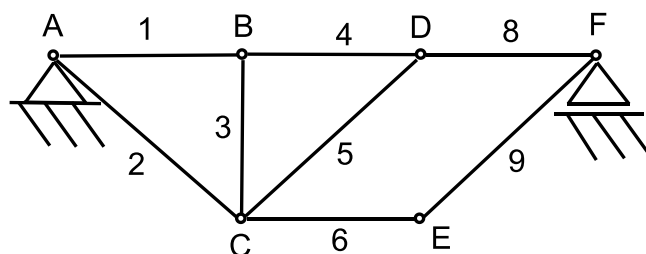
$$i = (15 - 1)3 - (3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) - 6 = 1$$

Při odstranění prutu 3 má soustava jeden stupeň pohyblivosti. Kdybychom chtěli soustavu zatěžovat, muselo by dojít k zatížení dle obr. 24. Síla ve styčnicku D musí být orientována pouze v rozmezí úhlu  $\alpha$ . Při takovém zatížení by v prutech 1 a 4 vznikalo tahové zatížení. Následně by ve styčnicku B, vlivem tahového zatížení v prutech 1 a 4, nedocházelo k jeho rotaci. V jednodušším řešení by se odstranil styčník B a pruty 1 a 4 by tvořily jeden prut.



Obr. 24. Zatížení soustavy – varianta c)

#### 5.2.2.4. Varianta d) Odebrání prutu 7



Obr. 25. Náčrt varianty d)

### Rozbor soustavy

#### Klasifikace vazeb:

##### Vnější vazby:

$$A - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$F - o.k.d. - \xi_i = 1$$

##### Vnitřní vazby:

$$A, E, F - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$$

$$B, D - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2$$

$$C - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2$$

#### Určení pohyblivosti:

Počet styčníků:

$$\delta = 6$$

Počet členů = prutů + základní těleso:

$$p = 9$$

Celkem:

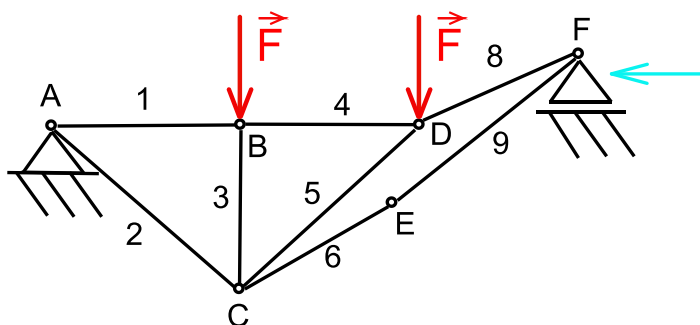
$$n = 15$$

$$i = (n - 1)i_v - (\Sigma \xi_i - \eta) - \delta$$

$$i = (15 - 1)3 - (3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) - 6 = 1$$

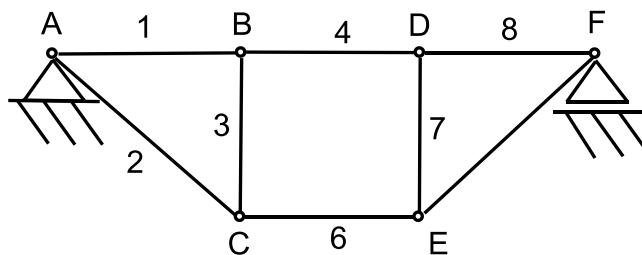
Po odebrání dochází k podobné pohyblivosti soustavy jako u varianty b). Jedinou odlišností je člen 8, který je stále součástí prutové soustavy. Dále při zatížení soustavy, se členy 6 a 9 stávají nefunkčními a nastává pohyblivost dle obr. 26. Tyto členy, v zatíženém stavu, mají

nulové zatížení a lze je odebrat ze soustavy. Po jejich odebrání se soustava stává totožnou s variantou b).



Obr. 26. Zatížení soustavy – varianta d)

#### 5.2.2.5. Varianta e) Odebrání prutu 5



Obr. 27. Náčrt varianty e)

### Rozbor soustavy

#### Klasifikace vazeb:

##### Vnější vazby:

$$A - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$F - o.k.d. - \xi_i = 1$$

##### Vnitřní vazby:

$$A, F - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$$

$$B, C, D, E - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2$$

#### Určení pohyblivosti:

Počet styčníků:

$$\delta = 6$$

Počet členů = prutů + základní těleso:

$$p = 9$$

Celkem:

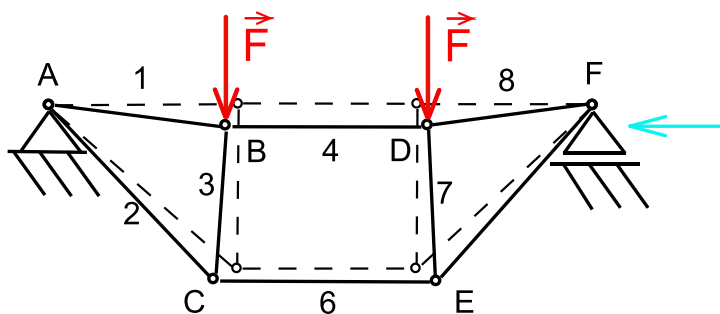
$$n = 15$$

$$i = (n - 1)i_v - (\sum \xi_i - \eta) - \delta$$

$$i = (15 - 1)3 - (2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) - 6 = 1$$

Při odebrání prutu 5, nastává pohyblivost. Poněvadž tento prut tvořil příčku, která zajišťovala tvarovou určitost konstrukce. Obr. 28 znázorňuje deformaci při stejné velikosti a orientaci

zatížení od obou zatěžujících sil. Při rozdílném zatížení by nastala deformace podobná předchozím variantám.



Obr. 28. Zatížení soustavy – varianta e)

Má-li být splněn požadavek, že prutová soustava zůstává nepohyblivá a nedojde k přetížení prutů, není možné odebrat prut bez náhrady jiným.

### 5.3. Způsoby rekonstrukce

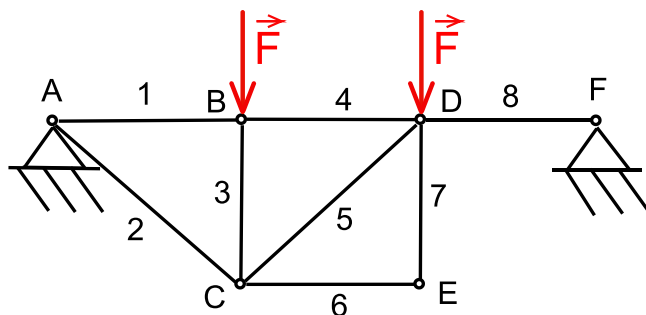
Z předchozí kapitoly je zřejmé, že nelze provést výpočet soustavy, aniž by nebyla provedena rekonstrukce pro zamezení pohyblivosti. Toto zamezení provádíme buď změnou vnějších vazeb, nebo začlenění náhradních prutů do soustavy.

#### 5.3.1. Výjimkové podepření

I když výjimkový případ podepření splňuje dostatečný počet vnějších vazeb i prutů v soustavě k odebrání všech stupňů volnosti, jejich nevhodné upořádání nezabrání skutečným či nekonečně malým posuvům nebo pootočením konstrukce. Při početním řešení nelze nalézt velikosti vnějších reakcí, determinant soustavy je nulový.

##### Varianta a)

V této variantě se jedná o výjimkové podepření, kdy se nositelky všech reakcí protínají v jednom bodě.



Obr. 29. Výjimkové podepření – varianta a)

## Rozbor soustavy

### Klasifikace vazeb:

#### Vnější vazby:

$$A - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$F - o.k.d. - \xi_i = 1$$

#### Vnitřní vazby:

$$A, E - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$$

$$B, D - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2$$

$$C - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2$$

### Určení pohyblivosti:

Počet styčníků:

$$\delta = 5$$

Počet členů – prutů + základní těleso:

$$p = 8$$

Celkem:

$$n = 13$$

Počet omezení deformačních parametrů:

$$\eta = -1$$

$$i = (n - 1)i_v - (\Sigma \xi_i - \eta) - \delta$$

$$i = (13 - 1)3 - (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1) - 5 = 1$$

### Statická určitost:

a) vnější

$$v = \mu_A$$

$$3 \neq 4$$

$s=1^\circ$  (statická neurčitost)

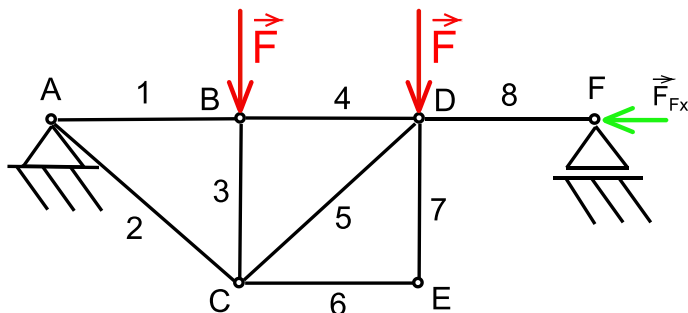
b) vnitřní

$$2k - 3 = p$$

$$2 \cdot 5 - 3 = 7$$

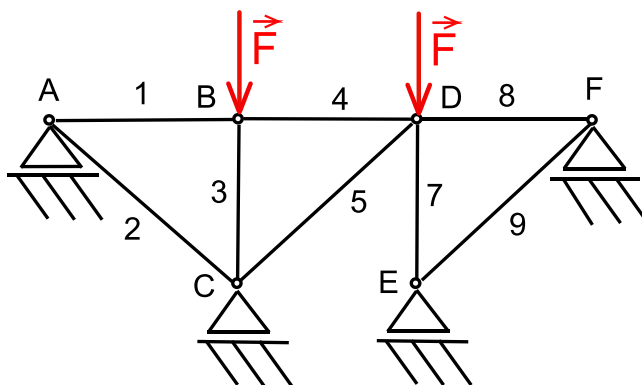
$$7 = 7$$



**Částečné uvolnění:**

Deformační podmínka:  $u_F = 0$

K řešení této úlohy je nutné uvažovat deformaci soustavy (PP druhého řádu).

**Varianta b)**

Obr. 30. Uložení soustavy – varianta b)

**Rozbor soustavy****Klasifikace vazeb:****Vnější vazby:**

$A, C, E, F - o.k.d. - \xi_i = 1$

**Vnitřní vazby:**

$A, E, F - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$

$B, C - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2$

$D - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2$

**Určení pohyblivosti:**

Počet styčníků:

$$\delta = 6$$

Počet členů – prutů + základní těleso:

$$p = 9$$

Celkem:

$$n = 15$$

$$i = (n - 1)i_v - (\sum \xi_i - \eta) - \delta$$

$$i = (15 - 1)3 - (3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1) - 6 = 0$$

**Statická určitost:**

a) vnější

$$v = \mu_A$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$6 = 6$$

b) vnitřní

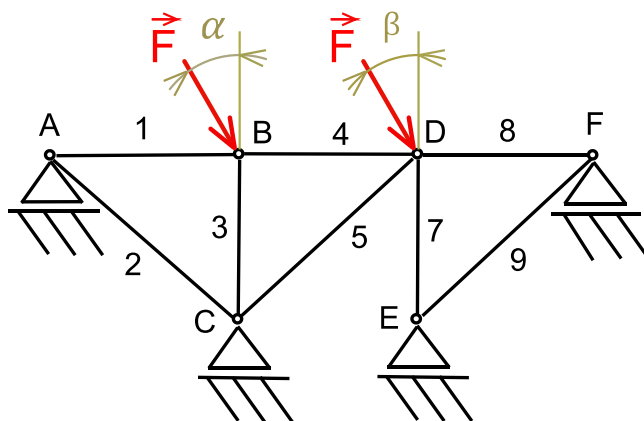
$$2k - 3 = p$$

$$2 \cdot 6 - 3 = 7$$

$$7 = 7$$

Soustava je staticky určitá.

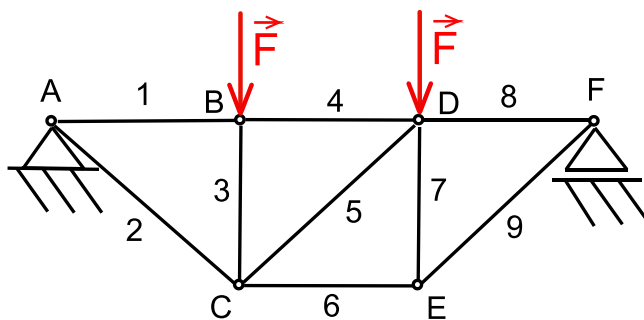
Aby se jednalo o výjimečné podepření soustavy, muselo by na zatížení dle Obr. 31. Vzniku výjimečného případu je zapříčiněno, že nositelky vnějších stykových sil jsou rovnoběžné. Při takovém zatížení by nic nebránilo k pohybu soustavy ve vodorovném směru. Proto je nutné, aby při takové rekonstrukci soustavy byly úhly  $\alpha, \beta = 0^\circ$ .



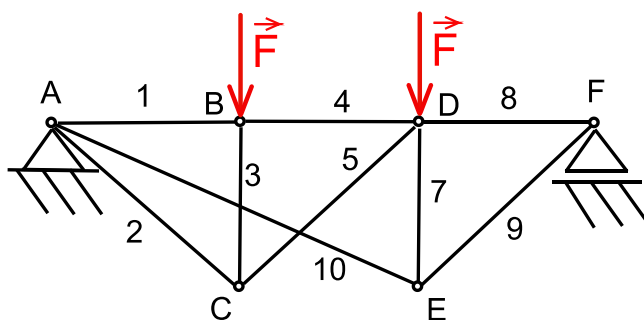
Obr. 31. Zatížení výjimečného podepření

### 5.3.2. Náhrada prutu (Přidávání a odebírání prutu)

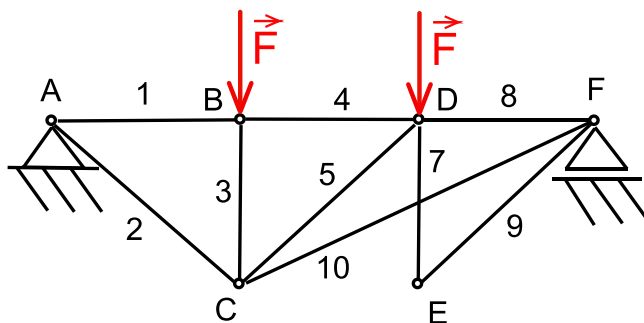
Při odebrání prutu 6 začleníme do soustavy prut 10. Začlenění provede ve třech variantách a vzájemně porovnáme soustavy, společně se základní konstrukcí. Především se zaměříme, k jakému rozložení sil v prutech nastane v jednotlivých variantách.



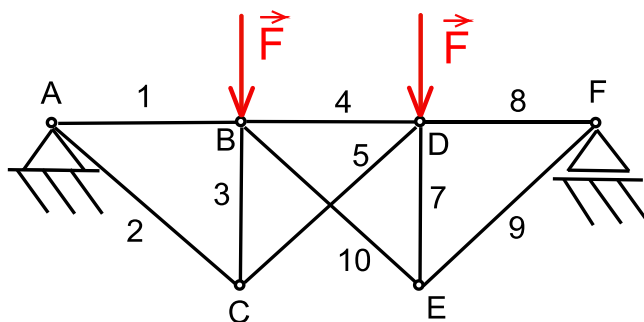
Obr. 32. Náčrt základní konstrukce



Obr. 33. Náčrt varianty a)



Obr. 34. Náčrt varianty b)



Obr. 35. Náčrt varianty c)

Všechny soustavy jsou nepohyblivé a staticky určité. Velikost zatížení je jednotková síla  $F = 1N$ .

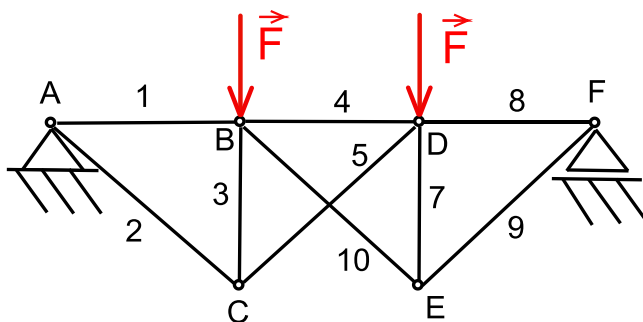
#### Výsledné hodnoty:

	Základní konstrukce	Varianta a)	Varianta b)	Varianta c)
F1	-1	-1,5	-1	-1
F2	1,414	0,707	1,414	1,414
F3	-1	-1	-1	-2
F4	-1	-1,5	-1	-2
F5	0	0,707	-1,414	1,414
F6	1	-	-	-
F7	-1	-1,5	0	-2
F8	-1	-1	-2	-1
F9	1,414	1,414	0	1,414
F10	-	1,118	2,236	1,414

Z výsledných hodnot vyplývá, že způsob uchycení přídavného prutu ovlivňuje velikosti a smysl zatížení jednotlivých prutů. Ve variantě a) nedosahujeme velkého nárůstu zatížení konstrukce vzhledem k základní soustavě. Ve variantě b) také nedosahuje velkého zatížení, ale výhodou této varianty je úplné odlehčení prutů 7 a 9, které můžeme vyjmout, aniž bychom způsobili pohyblivost soustavy. Zatížení těchto prutů zcela zachycuje přídavný prut 10. V poslední variantě je hlavní nevýhodou zatížení prutů 3, 4 a 7. Tyto pruty jsou dvojnásobně zatíženy na tlak. To by mohlo způsobit ztrátu vzpěrné stability.

## 5.4. Řešení rekonstruované soustavy

Vytvoříme rekonstruovanou soustavu, která bude nepohyblivá a staticky určitá. Danou soustavu budeme zatěžovat silami o velikosti  $F = 10kN$ . Výpočet velikostí sil v jednotlivých prutech provede na určitých metodách, které lze aplikovat na rekonstruovanou soustavu.



Obr. 36. Rekonstruovaná soustava

### 5.4.1. Rozbor soustavy

#### Klasifikace vazeb:

##### Vnější vazby:

$$A - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$F - o.k.d. - \xi_i = 1$$

##### Vnitřní vazby:

$$A, F - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$$

$$C, E - r.k.d. - \xi_i = 3 \cdot 2$$

$$B, D - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2$$

#### Určení pohyblivosti:

Počet styčníků:

$$\delta = 6$$

Počet členů = prutů + základní těleso:

$$p = 10$$

Celkem:

$$n = 16$$

$$i = (n - 1)i_v - \sum \xi_i - \delta$$

$$i = (16 - 1)3 - (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) - 6 = 0$$

Prutová soustava je nepohyblivá.

#### Statická určitost:

a) vnější

$$v = \mu_A$$

$$3 = 3$$

b) vnitřní

$$2k - 3 = p$$

$$2 \cdot 6 - 3 = 9$$

$$9 = 9$$

Soustava je staticky určitá.

**Statická podmínka rovnováhy:**

$$\Sigma F_x: F_{Ax} = 0$$

$$\Sigma F_y: F_{Ay} + F_{Fy} - F - F = 0$$

$$\Sigma M_{zA}: F_{Fy}3l - F2l - Fl = 0$$

$$F_{Ax} = 0N; F_{Ay} = 10kN; F_{Fy} = 10kN$$

## 5.5. Styčnicková metoda (obecná)

Podstatou metody je vytvoření algebraických rovnic, ze kterých vytvoříme matici. Sestavenou matici můžeme řešit pomocí vhodným počítačovým programem (Maple, MathCAD, atd.) nebo Gaussovou eliminací.

$$(A)(x) = (b)$$

$A$  – matice soustavy

$x$  – vektor neznámých

$b$  – vektor pravých stran

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{Fy} \\ F_{Ay} \\ F_{Ax} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Výsledné hodnoty:**

Prut	1	2	3	4	5	7	8	9	10
Velikost síly (kN)	-10	14,14	-20	-20	14,14	-20	-10	14,14	14,14

## 5.6. Styčnicková metody (postupná) [4]

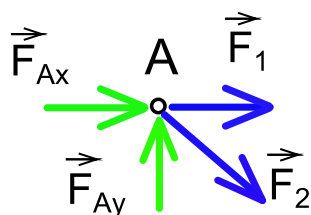
Podstatou styčnickové metody pro určení sil v prutech je sestavení rovnovážných silových rovnic pro všechny styčníky v soustavě.

Výhodou této metody je její univerzálnost. Metoda je jednoduchá, avšak v případě rozsáhlé soustavy je metoda dosti pracná. V případech složitých, zejména prostorových soustav je však jedinou efektivní metodou, zvláště je-li možno pro řešení soustavy rovnic využít počítače.

### 5.6.1. Postup

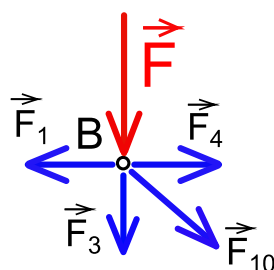
- V bodech uložení zavedeme příslušné reakce vazeb.
- Ve všech prutech zavedeme osově síly jako účinky na styčníky.
- Pro všechny styčníky napíšeme silové rovnice rovnováhy ve dvou (rovinný případ) nebo třech směrech (prostorový případ) a získáme soustavu  $2n$  nebo  $3n$  základních rovnovážných rovnic.

## Uvolnění jednotlivých styčníků:



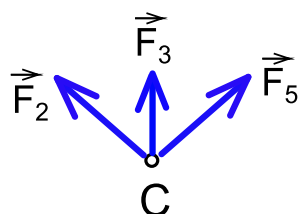
$$x: F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_2 + F_{Ax} = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2 + F_{Ay} = 0$$



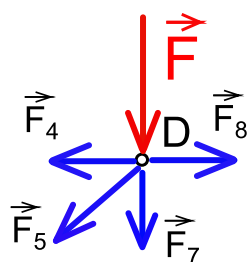
$$x: -F_1 + F_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10} = 0$$

$$y: F_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10} - F = 0$$



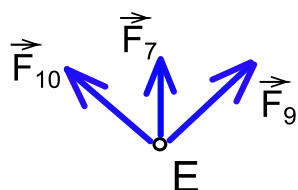
$$x: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_5 = 0$$

$$y: \frac{\sqrt{2}}{2} F_2 + F_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_5 = 0$$



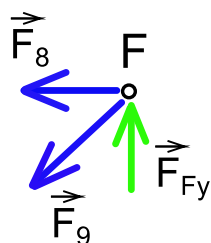
$$x: -F_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_5 + F_8 = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_5 - F_7 - F = 0$$



$$x: \frac{\sqrt{2}}{2} F_9 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10} = 0$$

$$y: F_7 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_9 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10} = 0$$



$$x: -F_8 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_9 = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_9 + F_{Fy} = 0$$



**Výsledné hodnoty:**

Prut	1	2	3	4	5	7	8	9	10
Velikost síly (kN)	-10	14,14	-20	-20	14,14	-20	-10	14,14	14,14

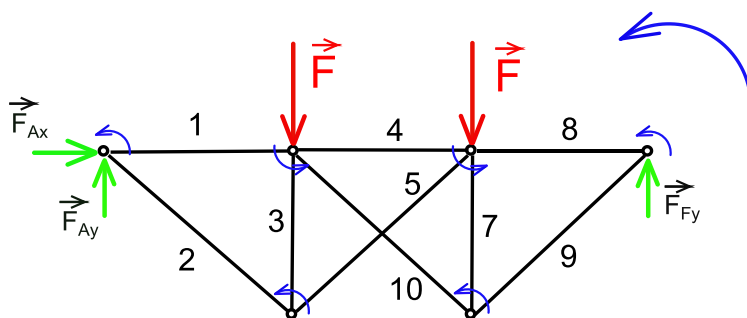
**5.7. Cremonova metoda [4]**

Cremonova metoda je grafická interpretace styčnickové metody, tj. grafické vyšetření rovnováhy jednotlivých styčníků, následné sestavení grafického obrazce celkové soustavy. Podstatou zjištění velikosti sil v jednotlivých prutech je vhodné zvolení měřítka výsledných stykových sil.

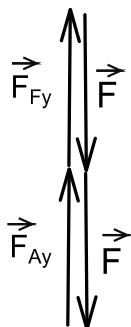
Metoda je vhodná pro jednoduché rovinné prutové soustavy, která může být i rychlejší než početní styčnicková metoda.

**5.7.1. Postup**

- Ve zvoleném měřítku nakreslíme vyšetřenou soustavu a zvolíme měřítko sil.
- Graficky určíme nebo ze statické rovnováhy vypočteme výslednice stykových sil uložení prutové soustavy, kterou považujeme za jediné tuhé těleso.
- Zvolíme si směr pro postup zakreslování stykových sil uložení a sil v prutech v silovém obrazci (Obr. 37).
- Nakreslíme uzavřený silový obrazec vnějších sil a stykových sil uložení. Získáme tak kostru Cremonova obrazce.
- Cremonův obrazec začínáme u styčnicku se dvěma pruty a nakreslíme jemu příslušný silový obrazec, dodržující zásadu, aby sled sil v něm odpovídal zvolenému kladnému směru, jímž styčnick obcházíme.



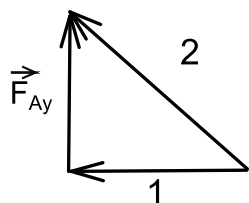
Obr. 37. Určení směru pro postup zakreslování

**Grafické určení stykových sil soustavy:**

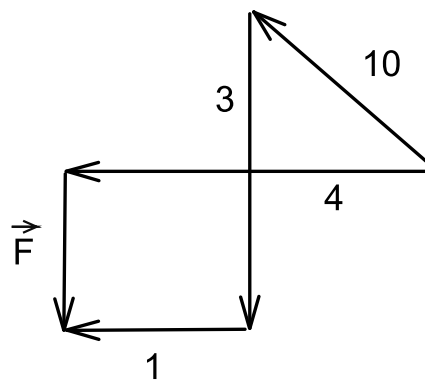
$$|\vec{F}| = 10 \text{ kN}$$

**Složkové obrazce sil jednotlivých styčníků:**

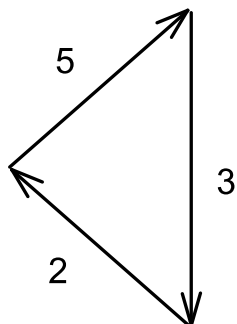
A)



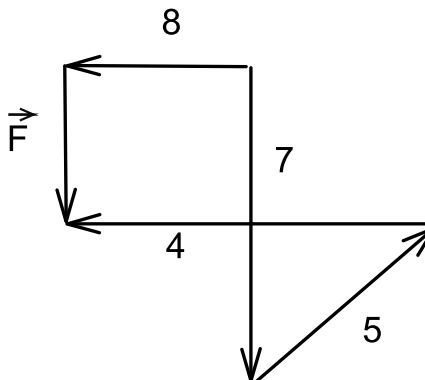
B)



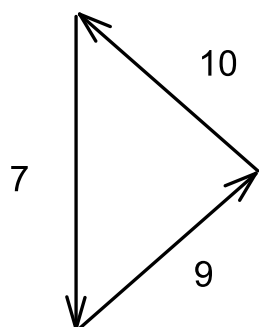
C)



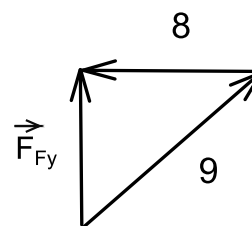
D)



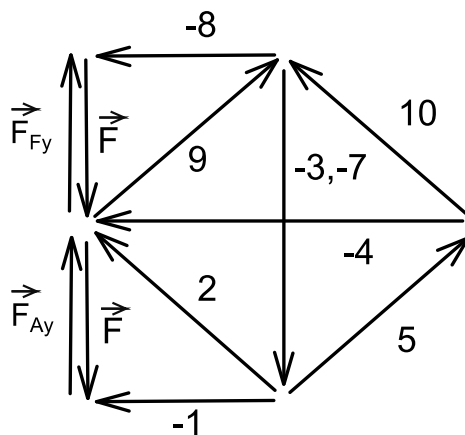
E)



F)



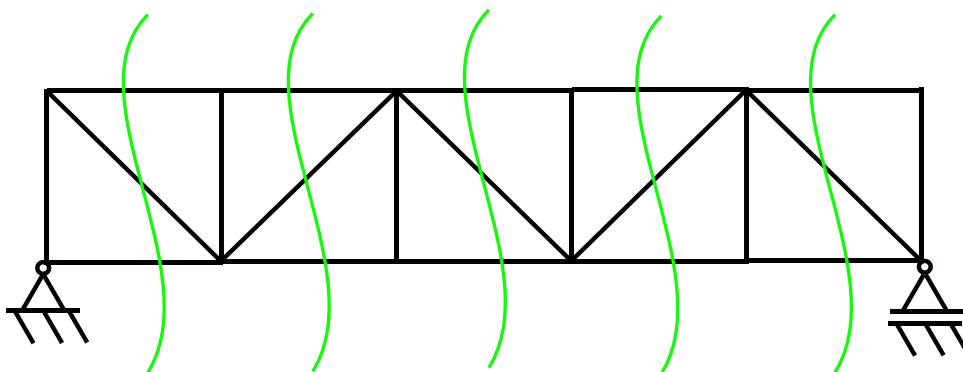
**Cremonův obrazec:**



### 5.8. Průsečná metoda (Ritter)

Průsečná metoda je velmi užitečná metoda, pokud chceme rychle určit velikosti sil v prutech. Podstata metody je v tom, že vedeme řez prutovou soustavou přes pruty, ve kterých určíme silovou rovnováhu. Řez musí procházet nejvýše třemi pruty. [4]

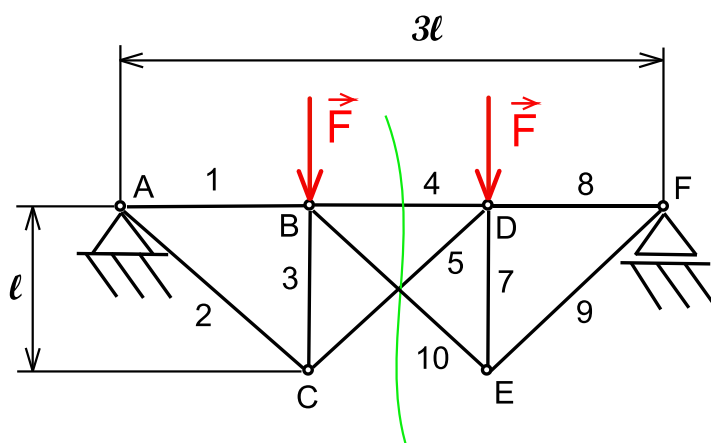
U některých typů prutových soustav (Obr. 38.) vede tato metoda ke snadnějšímu a rychlejšímu řešení. Výhodou použití metody je tehdy, chceme-li určit jen síly v některých prutech, aniž bychom museli řešit síly ve všech prutech soustavy.



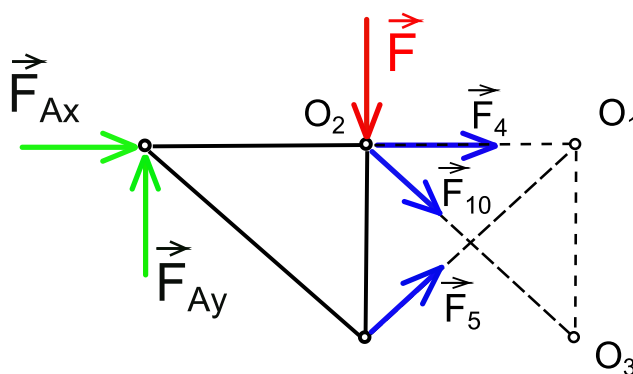
Obr. 38.

### 5.8.1. Postup [4]

- Prutovou soustavou vedeme řez, který rozdělí soustavu na dvě části. Řezem musí být protnuty tři pruty.
- V jedné části ze soustavy zvolíme osově body, ke kterým sestavíme momentové rovnice. Osově body volíme tak, aby nám některé síly protínaly námi zvolený osový bod.



Obr. 39. Řez soustavou – varianta a)



**Momentové rovnice:**

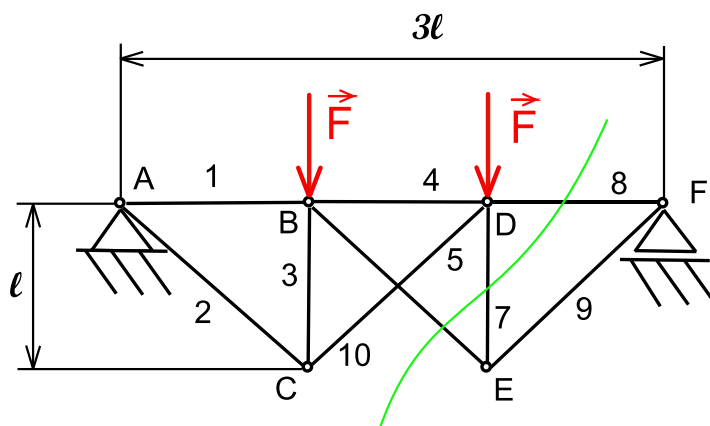
$$O_1: F_{10}l - F_{Ay}2l + Fl = 0$$

$$O_2: F_5 \frac{\sqrt{2}}{2} l - F_{Ay}l = 0$$

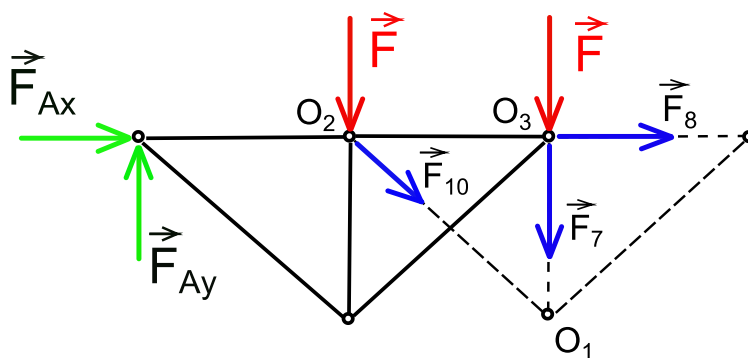
$$O_3: -F_4l - F_5 \frac{\sqrt{2}}{2} l - F_{Ay}l - F_{Ax}l + Fl = 0$$

Výsledné hodnoty:

Prut	4	5	10
Velikost síly (kN)	-20	14,14	14,14



Obr. 40. Řez soustavou – varianta b)



Momentové rovnice:

$$O_1: -F_8 l - F_{Ax} l - F_{Ay} 2l + Fl = 0$$

$$O_2: -F_7 l - F_{Ay} l - Fl = 0$$

$$O_3: F_{10} \frac{\sqrt{2}}{2} l - F_{Ay} 2l + Fl = 0$$

Výsledné hodnoty:

Prut	7	8	10
Velikost síly (kN)	-20	10	14,14

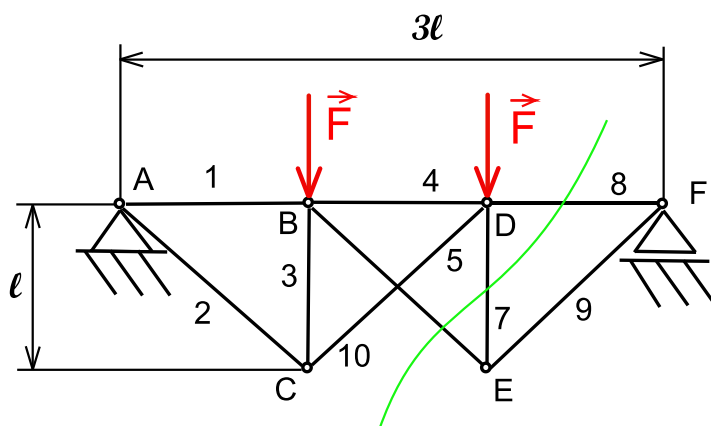
## 5.9. Průsečná metoda (Culmann) [2]

Culmannova metoda je grafický způsob řešení rovnováhy čtyř sil v rovině pomocí Culmannovy přímky. Čtyři síly jsou v rovnováze, když výslednice dvou libovolných sil leží na přímce, tato přímka se nazývá Culmannova přímka.

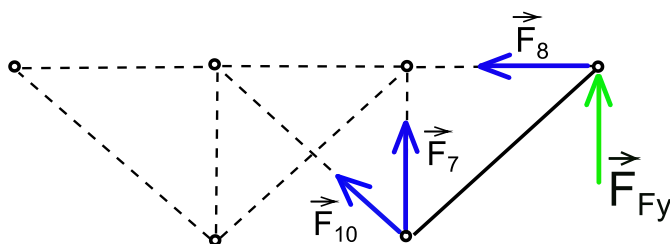
Princip metody spočívá v rozdělení soustavy na dvě části řezem. Řez musí protnout tři pruty, které se neprotínají v jednom bodě.

### 5.9.1. Postup

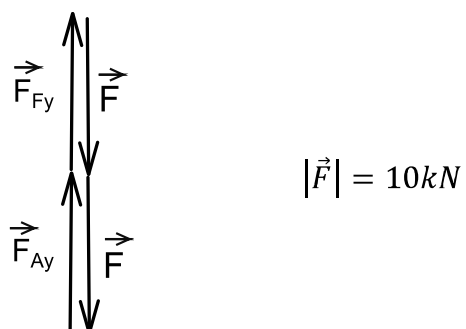
- Prutovou soustavou vedeme řez, který rozdělí soustavu na dvě části. Řezem musí být protnuty tři pruty.
- Ve zvoleném měřítku nakreslíme vyšetřenou soustavu a zvolíme měřítko sil.
- Graficky určíme výslednice stykových sil.
- V jedné části soustavy nakreslíme nositelkový obrazec s Culmannovou přímkou.
- Nositelkový obrazec překreslíme na silový obrazec.



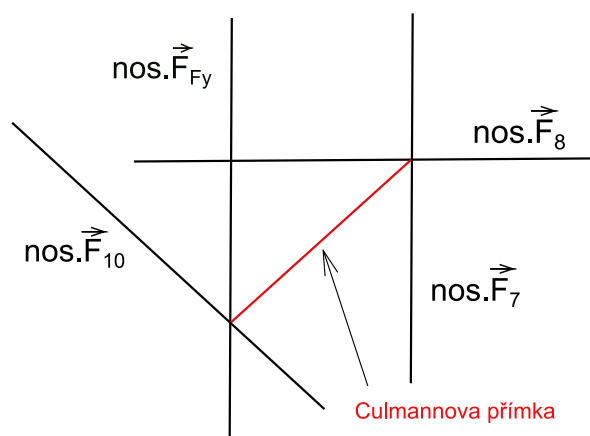
Obr. 41. Řez soustavou



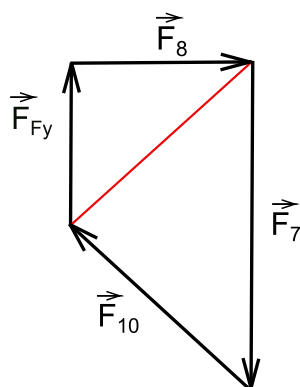
**Grafické určení stykových sil soustavy:**



**Nositelkový obrazec:**



**Silový obrazec:**

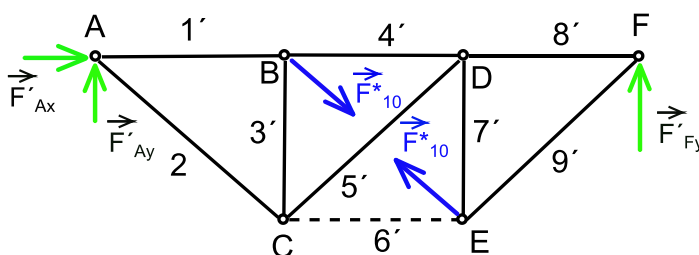


## 5.10. Metoda náhradního prutu (Henneberg) [4]

Metodu náhradního prutu lze řešit jak početně tak i graficky. Podstata metody je založena na tom, že se vyjme vhodný prut a pro zachování statické určitosti se připojí jinam náhradní prut. Namísto vyjmutého prutu se připojí síly a určí se síly v prutech tím vyvolané. Následně se určí síly v prutech, které byly vyvolány zvolenou silou. Hodnoty zatížení můžeme určit buď vytvořením silových rovnic, nebo silovým obrazcem. Poté se určí síly v prutech pod vnějším zatížením, avšak bez sil nahrazujících vyjmutý prut. Následně superponujeme oba silové stavy tak, aby náhradní prut se stal nulovým prutem a bylo možno jej vyjmout.

### 5.10.1. Postup

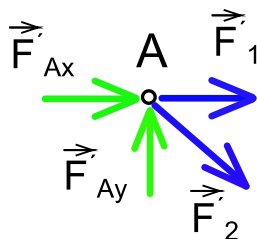
- Zvolíme prut, který bude vyjmut a nahrazen jiným.
- Ve styčnicích vyjmutého prutu zvolíme sílu libovolné velikosti.
- Vypočítáme reakce od naší zvolené síly.
- Odstraníme zvolenou sílu a reakce soustavy od původní zatěžující síly.
- Výsledné hodnoty v nahrazeném prutu podělíme, pro zjištění hodnoty  $\kappa$ .
- Hodnotu  $\kappa$  vynásobíme s výslednými hodnotami od zvolené síly a sečteme s výsledky od zatěžující síly.



Obr. 42. Nahrazení prutu

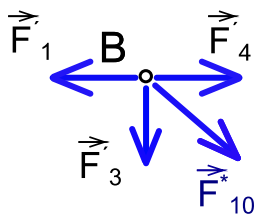


## Uvolnění jednotlivých styčníků:



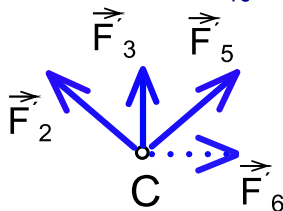
$$x: F_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_2' + F_{Ax}' = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2' + F_{Ay}' = 0$$



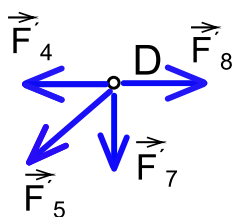
$$x: -F_1' + F_4' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10}^* = 0$$

$$y: F_3' - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10}^* = 0$$



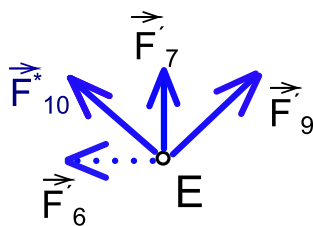
$$x: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_5' + F_6' = 0$$

$$y: \frac{\sqrt{2}}{2} F_2' + F_3' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_5' = 0$$



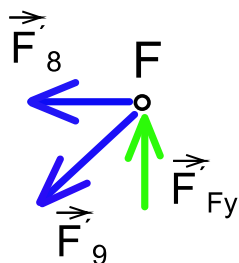
$$x: -F_4' - \frac{\sqrt{2}}{2} F_5' + F_8' = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_5' - F_7' = 0$$



$$x: +\frac{\sqrt{2}}{2} F_9' - F_6' - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10}^* = 0$$

$$y: F_7' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_9' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10}^* = 0$$



$$x: -F_8' - \frac{\sqrt{2}}{2} F_9' = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_9' + F_{Fy}' = 0$$

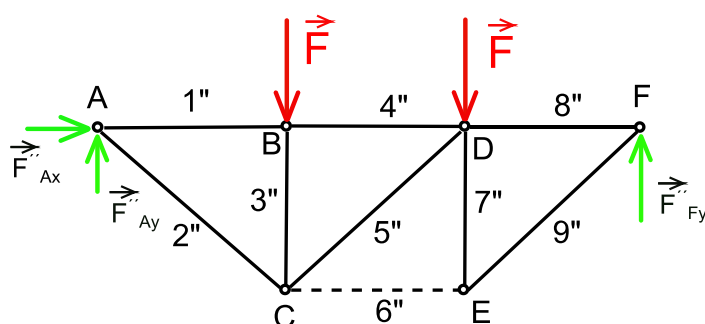
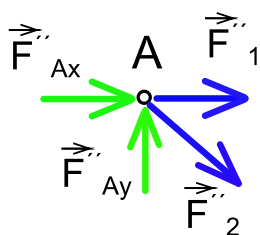
Velikost zatěžující síly jsme zvolili  $F_{10}^* = 100N$ .

**Výsledné hodnoty:**

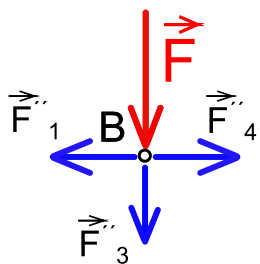
Pрут	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
Velikost síly (N)	0	0	-70,71	-70,71	100	-70,71	-70,71	0	0

Vnější styková síla	F'Fy	F'Ay	F'Ax
Velikost zatížení (N)	0	0	0

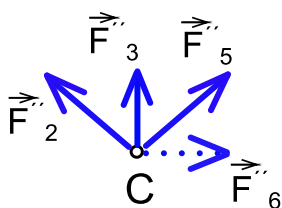
Nyní provedeme výpočet napětí prutů od zatěžujících sil.

**Uvolnění jednotlivých styčníků:**

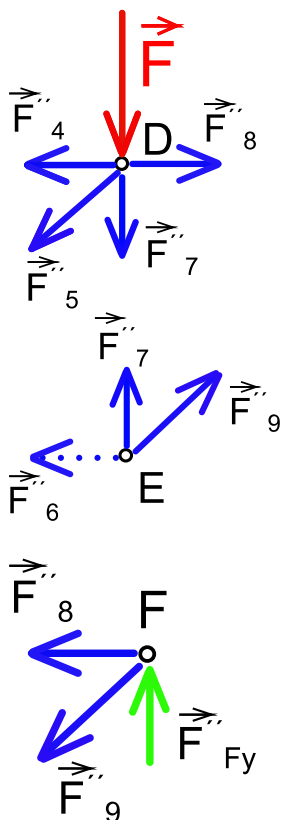
$$\begin{aligned} x: F_1'' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_2'' + F_{Ax} &= 0 \\ y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2'' + F_{Ay} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x: -F_1'' + F_4'' &= 0 \\ y: F_3'' + F &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2'' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_5'' + F_6'' &= 0 \\ y: \frac{\sqrt{2}}{2} F_2'' + F_3'' + \frac{\sqrt{2}}{2} F_5'' &= 0 \end{aligned}$$



$$x: -F_4'' - \frac{\sqrt{2}}{2}F_5'' + F_8'' = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2}F_5'' - F_7'' - F = 0$$

$$x: -F_6'' + \frac{\sqrt{2}}{2}F_9'' = 0$$

$$y: F_7'' + \frac{\sqrt{2}}{2}F_9'' = 0$$

$$x: -F_8'' - \frac{\sqrt{2}}{2}F_9'' = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2}F_9'' + F_{Fy} = 0$$

Výsledné hodnoty:

Pрут	1''	2''	3''	4''	5''	6''	7''	8''	9''
Velikost síly (kN)	-10	14,14	-10	-10	0	10	-10	-10	14,14

Vnější styková síla	F''Fy	F''Ay	F''Ax
Velikost zatížení (kN)	10	10	0

Po zjištění hodnot v prutu 6 z obou početních provedení, zjistíme hodnotu  $\kappa$  ze vzorce, který je určen ze statické rovnováhy. Následně vypočítanou skutečné hodnoty sil v ostatních prutech v soustavě, dle příslušného vzorce:

$$F_j = F_j'' + \kappa F_j'$$

$$F_6'' + \kappa F_6' = 0$$

$$\kappa = -\frac{F_6''}{F_6'} = -\frac{10000}{-70,71} = -141,42$$

$$F_1 = F_1'' + \kappa F_1' = -10000 + (-141,42) \cdot 0$$

$$F_2 = F_2'' + \kappa F_2' = 14140 + (-141,42) \cdot 0$$

$$F_3 = F_3'' + \kappa F_3' = -10000 + (-141,42) \cdot (-70,71)$$

$$F_4 = F_4'' + \kappa F_4' = -10000 + (-141,42) \cdot (-70,71)$$

$$F_5 = F_5'' + \kappa F_5' = 0 + (-141,42) \cdot 100$$

$$F_7 = F_7'' + \kappa F_7' = -10000 + (-141,42) \cdot (-70,71)$$

$$F_8 = F_8'' + \kappa F_8' = -10000 + (-141,42) \cdot 0$$

$$F_9 = F_9'' + \kappa F_9' = 14140 + (-141,42) \cdot 0$$

$$F_{10} = F_{10}'' + \kappa F_{10}' = 0 + (-141,42) \cdot 100$$

$$F_{Fy} = F_{Fy}'' + \kappa F_{Fy}' = 10000 + (-141,42) \cdot 0$$

$$F_{Ay} = F_{Ay}'' + \kappa F_{Ay}' = 10000 + (-141,42) \cdot 0$$

$$F_{Ax} = F_{Ax}'' + \kappa F_{Ax}' = 0 + (-141,42) \cdot 0$$

**Výsledné hodnoty:**

Prut	1	2	3	4	5	7	8	9	10
Velikost síly (kN)	-10	14,14	-20	-20	14,14	-20	-10	14,14	14,14

## 5.11. Metoda neurčitého měřítka

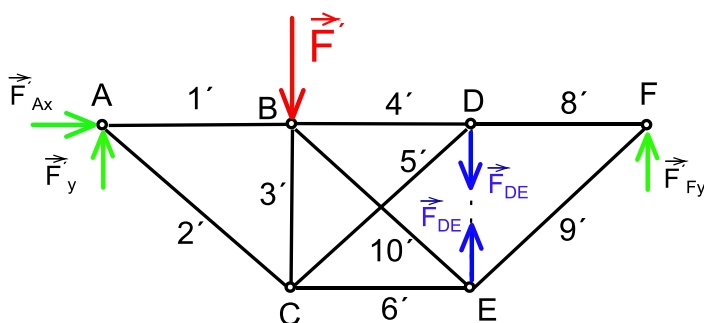
Princip metody spočívá v tom, že síly v prutech jsou přímo úměrné velikosti zátěžné síly na prutovou soustavu.

Při použití této metody zvolíme v libovolném (nenulovém) prutu zatěžující sílu a určíme velikosti sil v prutech. Při výpočtu musíme uvažovat, že původní zatěžující síla je neznámý parametr. Po vyřešení soustavy zvětší všechny síly v poměru  $\kappa = \frac{F}{F'}$ . Hodnota  $\kappa$  může být i záporná. V tom případě by síla  $\vec{F}'$  měla opačný směr zatížení, než skutečná zatěžující síla  $\vec{F}$ .

Tato metoda umožňuje řešit soustavu, která je zatěžována pouze jednou silou. Kdyby soustava byla zatížena další silou, bylo by potřeba provést nové řešení a výsledky z obou řešení superponovat. [4]

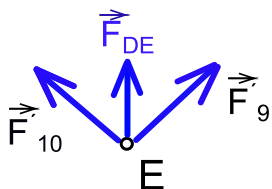
### 5.11.1. Postup

- Zvolíme prut, který nahradíme silou o libovolné velikosti. Zatěžující sílu považujeme jako za neznámý parametr.
- Vypočítáme reakce od námi zvolené síly.
- Výslednou hodnotu zatěžující síly podělíme s původní hodnotou zatěžující síly, pro zjištění hodnoty  $\kappa$ .
- Hodnotu  $\kappa$  vynásobíme s výslednými hodnotami od zvolené síly.



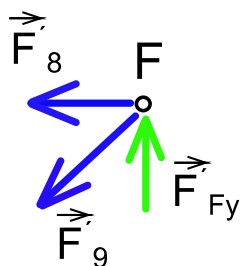
Obr. 43.

**Uvolnění jednotlivých styčníků:**



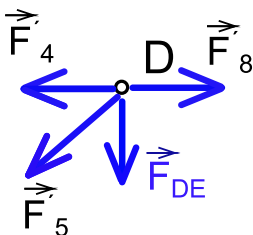
$$x: +\frac{\sqrt{2}}{2}F'_9 - \frac{\sqrt{2}}{2}F'_{10} = 0$$

$$y: F_{DE} + \frac{\sqrt{2}}{2}F'_9 + \frac{\sqrt{2}}{2}F'_{10} = 0$$



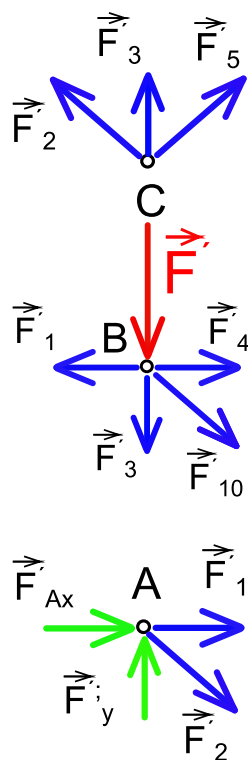
$$x: -F'_8 - \frac{\sqrt{2}}{2}F'_9 = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2}F'_9 + F_{Fy} = 0$$



$$x: -F'_4 - \frac{\sqrt{2}}{2}F'_5 + F'_8 = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2}F'_5 - F_{DE} = 0$$



$$x: -\frac{\sqrt{2}}{2}F'_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}F'_5 = 0$$

$$y: \frac{\sqrt{2}}{2}F'_2 + F'_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}F'_5 = 0$$

$$x: -F'_1 + F'_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}F'_{10} = 0$$

$$y: F'_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}F'_{10} - F' = 0$$

$$x: F'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F'_2 + F'_{Ax} = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2}F'_2 + F'_{Ay} = 0$$

Velikost zatěžující síly jsme zvolili  $F_{DE} = 100\text{N}$ .

### Výsledné hodnoty:

Prut	1'	2'	3'	4'	5'	8'	9'	10'
Velikost síly (N)	100	-141,42	200	150	-141,42	50	-70,71	-70,71

Vnější styková síla	$F'_{Fy}$	$F'_{Ay}$	$F'_{Ax}$
Velikost zatížení (N)	-50	-100	0

Zatěžující síla	$F'$
Velikost (N)	-150

Nově zjištěnou velikostí síly podělíme s původní silou dle vzorce. S vypočítanou hodnotou  $\kappa$  vynásobíme všechny velikosti sil v prutech a vnějších reakcí z předchozích výsledků.

$$\kappa = \frac{F}{F'} = \frac{10000}{-150} = -\frac{200}{3}$$

$$F_1^* = \kappa F'_1 = -\frac{200}{3} \cdot 100$$

$$F_2^* = \kappa F'_2 = -\frac{200}{3} \cdot (-141,42)$$

$$F_3^* = \kappa F_3' = -\frac{200}{3} \cdot 200$$

$$F_4^* = \kappa F_4' = -\frac{200}{3} \cdot 150$$

$$F_5^* = \kappa F_5' = -\frac{200}{3} \cdot (-141,42)$$

$$F_7^* = \kappa F_{DE} = -\frac{200}{3} \cdot 100$$

$$F_8^* = \kappa F_8' = -\frac{200}{3} \cdot 50$$

$$F_9^* = \kappa F_9' = -\frac{200}{3} \cdot (-70,71)$$

$$F_{10}^* = \kappa F_{10}' = -\frac{200}{3} \cdot (-70,71)$$

$$F_{Fy}^* = \kappa F_{Fy}' = -\frac{200}{3} \cdot (-50)$$

$$F_{Ay}^* = \kappa F_{Ay}' = -\frac{200}{3} \cdot (-100)$$

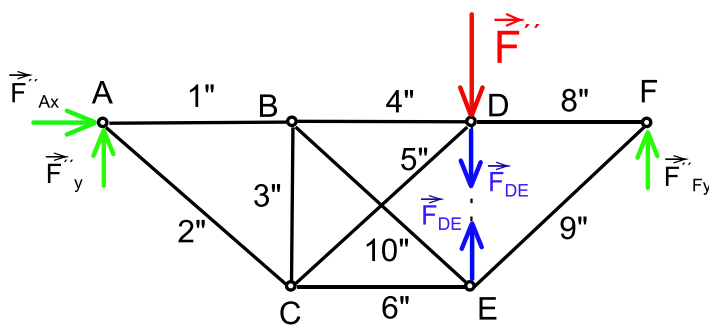
$$F_{Ax}^* = \kappa F_{Ax}' = -\frac{200}{3} \cdot 0$$

**Výsledné hodnoty:**

Prut	1*	2*	3*	4*	5*	7*	8*	9*	10*
Velikost síly (N)	-6666,7	9428	-13333	-10000	9428	-6666,7	-3333,3	4714	4714

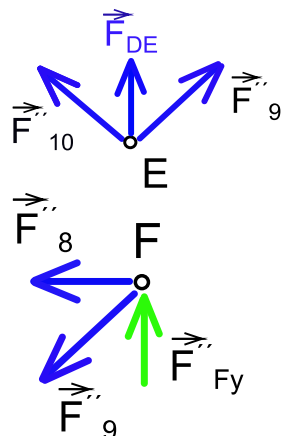
Vnější styková síla	F*Fy	F*Ay	F*Ax
Velikost zatížení (N)	3333,3	6666,6	0

Nyní provedeme výpočet zatížení v prutech a velikosti druhé zatěžující síly (Obr. 44).



Obr. 44.

## Uvolnění jednotlivých styčníků:

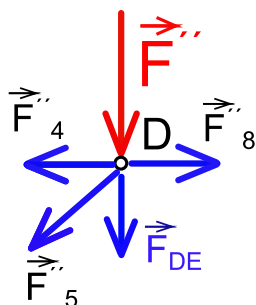


$$x: +\frac{\sqrt{2}}{2}F_9'' - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}'' = 0$$

$$y: F_{DE} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_9'' + \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}'' = 0$$

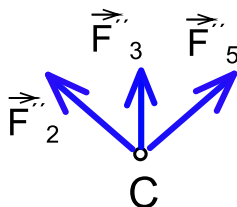
$$x: -F_8'' - \frac{\sqrt{2}}{2}F_9'' = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2}F_9'' + F_{Fy} = 0$$



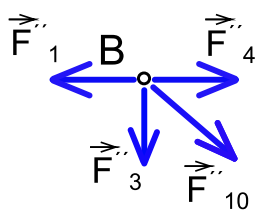
$$x: -F_4'' - \frac{\sqrt{2}}{2}F_5'' + F_8'' = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2}F_5'' - F_{DE}'' - F_5'' = 0$$



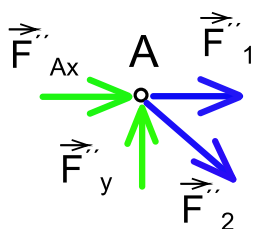
$$x: -\frac{\sqrt{2}}{2}F_2'' + \frac{\sqrt{2}}{2}F_5'' = 0$$

$$y: \frac{\sqrt{2}}{2}F_2'' + F_3'' + \frac{\sqrt{2}}{2}F_5'' = 0$$



$$x: -F_1'' + F_4'' + \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}'' = 0$$

$$y: F_3'' - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}'' = 0$$



$$x: F_1'' + \frac{\sqrt{2}}{2}F_2'' + F_{Ax}'' = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2}F_2'' + F_{Ay}'' = 0$$



**Výsledné hodnoty:**

Prut	1''	2''	3''	4''	5''	8''	9''	10''
Velikost síly (N)	25	-35,35	50	75	-35,35	50	-70,71	70,71

Vnější styková síla	F''Fy	F''Ay	F''Ax
Velikost zatížení (N)	-50	-25	0

Zatěžující síla	F''
Velikost (N)	-75

Nyní provedeme stejný postup jako v předchozím výpočtu pro zjištění hodnoty  $\kappa$ , sil v prutech a vnějších reakcí.

$$\kappa = \frac{F}{F''} = \frac{10000}{-75} = -133,33$$

$$F_1^{**} = \kappa F_1'' = -133,33 \cdot 25$$

$$F_2^{**} = \kappa F_2'' = -133,33 \cdot (-35,35)$$

$$F_3^{**} = \kappa F_3'' = -133,33 \cdot 50$$

$$F_4^{**} = \kappa F_4'' = -133,33 \cdot 75$$

$$F_5^{**} = \kappa F_5'' = -133,33 \cdot (-35,35)$$

$$F_7^{**} = \kappa F_{DE} = -133,33 \cdot 100$$

$$F_8^{**} = \kappa F_8'' = -133,33 \cdot 50$$

$$F_9^{**} = \kappa F_9'' = -133,33 \cdot (-70,71)$$

$$F_{10}^{**} = \kappa F_{10}'' = -133,33 \cdot (-70,71)$$

$$F_{Fy}^{**} = \kappa F_{Fy}'' = -133,33 \cdot (-50)$$

$$F_{Ay}^{**} = \kappa F_{Ay}'' = -133,33 \cdot (-25)$$

$$F_{Ax}^{**} = \kappa F_{Ax}'' = -133,33 \cdot 0$$

**Výsledné hodnoty:**

Prut	1**	2**	3**	4**	5**	7**	8**	9**	10**
Velikost síly (N)	-3333,3	4713,8	-6666,6	-9999,7	4713,8	-13333	-6666,5	9427,9	9427,9

Vnější styková síla	F**Fy	F**Ay	F**Ax
Velikost zatížení (N)	6666,66	3333,33	0

**Výsledné hodnoty:**

Celkovou hodnotu v prutech od obou zatěžujících sil získáme sečtením předchozích výsledků

$$F_i = F_i^* + F_i^{**}.$$

Prut	1	2	3	4	5	7	8	9	10
Velikost síly (kN)	-10	14,14	-20	-20	14,14	-20	-10	14,14	14,14

Vnější styková síla	FFy	FAy	FAx
Velikost zatížení (kN)	10	10	0

## 6. Metoda konečných prvků (MKP)

MKP je numerická metoda, ve které jsou rovnice obsaženy v maticovém tvaru, což je výhodné pro řešení na počítačích. Zkoumaná část tělesa je přitom idealizována pomocí vhodně uspořádaných malých podoblastí, nazývaných konečné prvky (elementy). Když je metoda aplikovaná na hmotném kontinuu, tak idealizace spočívá ve vytvoření (vygenerování) sítě složené s konečným počtem prvků (elementů), které mají konečný počet stupňů volnosti (pohyblivosti). Prvky jsou základní jednotkou s definovanými stupni volnosti, které mohou být různých tvarů a forem (pružina, tyč – prut, nosník, membrána, deska, ...).

Prvky jsou spojeny v bodech, které jsou nazývány uzly. Všechny prvky mají svoji vlastní charakteristickou fyzikální závislost, která je například dána vztahem mezi zatížením a deformací, tzv. tuhost prvku. Tato tuhost prvku je reprezentována tzv. maticí tuhostí prvků, která matematicky popisuje fyzikální chování materiálu prvku (elastický, plastický, viskoelastický, apod. model materiálu). Následně analýza spočívá v sestavení soustavy rovnic platných pro idealizovanou oblast tělesa. Výsledkem řešení jsou posuvy každého uzlu sítě pro dané zatěžovací a okrajové podmínky. Po stanovení posuvu mohou být určeny napětí, pomocí vztahů posunutí - deformace a deformace – napětí, v jakémkoliv místě zkoumaného tělesa. [9]

### 6.1. Řešení soustav

Pro výpočet prutových konstrukcí byl použit program ANSYS, ve kterém byly vymodelovány konstrukce pro zjištění deformace a velikost zatížení jednotlivých prutů. Při modelování soustav byl použit model lineárního, izotropního materiálu (Hookovský materiál).

Materiálové charakteristiky tohoto modelu jsou Youngův modul pružnosti a Poissonovo číslo (Tab. 6.1). Soustavy jsou modelovány 2D a jednotkových parametrech (průřezy, poloměry).

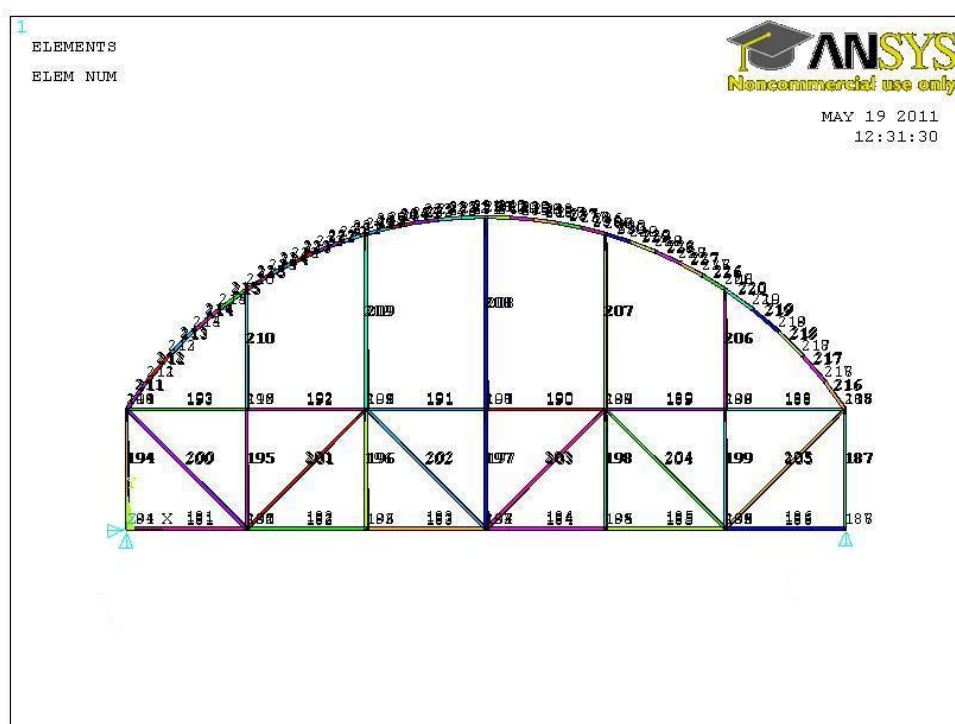
Modul pružnosti (MPa)	210000
Poissonovo číslo	0,3

Tab. 6.1

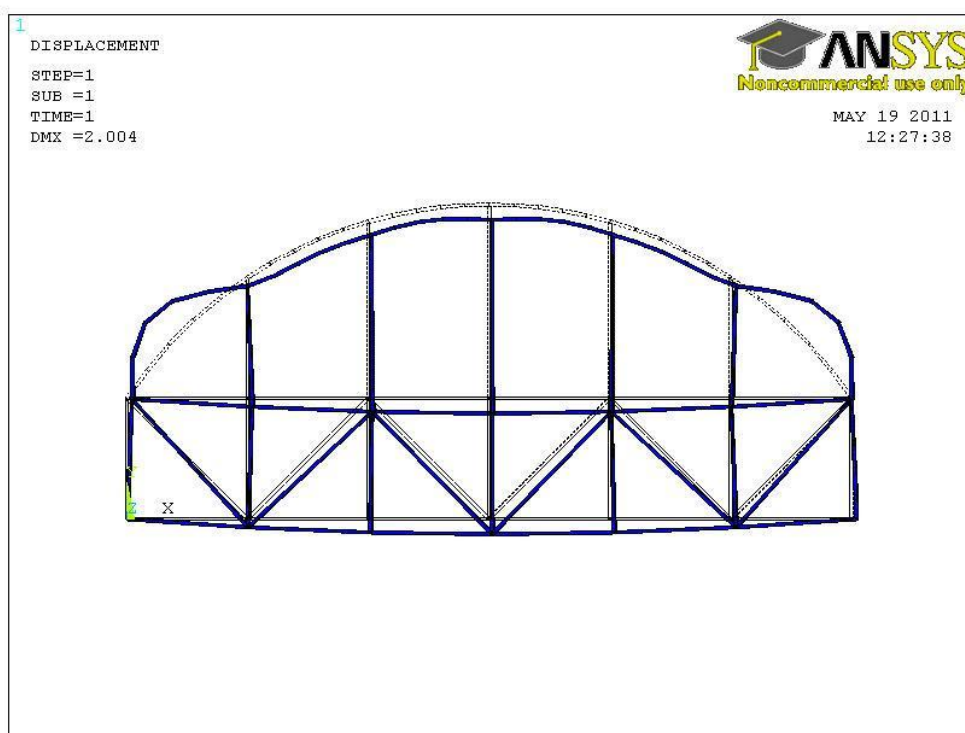
### 6.1.1. Výpočet konstrukce se zavedeným třetím pásem

Prutová konstrukce se zavedeným pásem je tvořena prutovými tělesy (LINK 2D) a zakřiveným pásem (BEAM 2D). Spoje mezi prutovými tělesy a zakřiveným pásem jsou rotační spoje. Celá soustava je uložena na rotační a obecné vazbě a zatížena kolmými silami na prostřední pás.

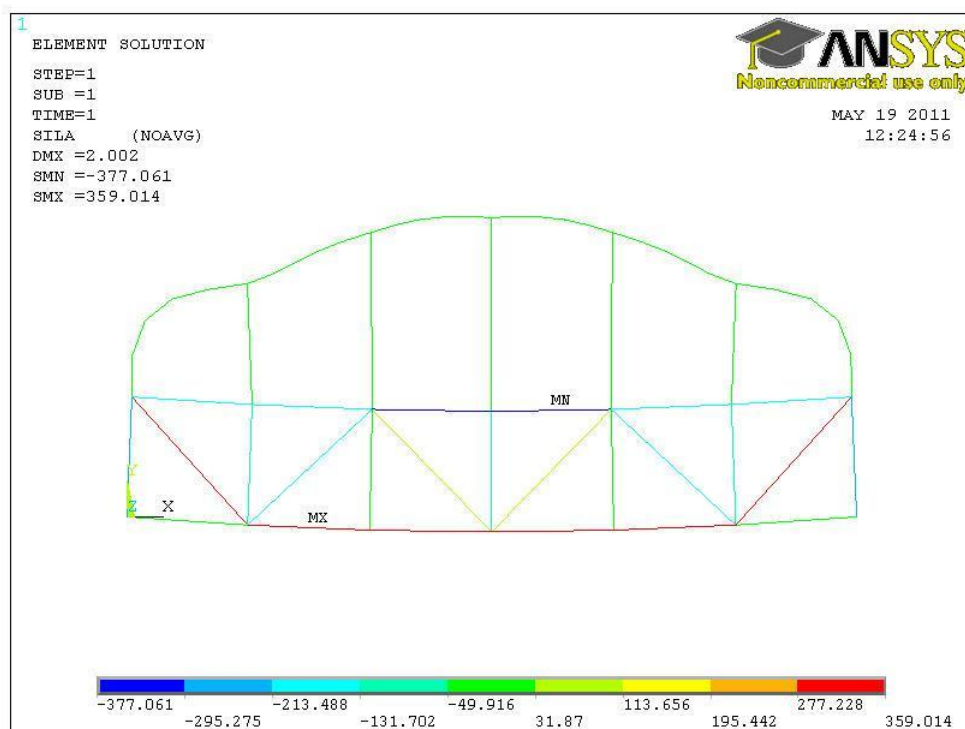
**Prutové konstrukce se zavedeným pásem:**



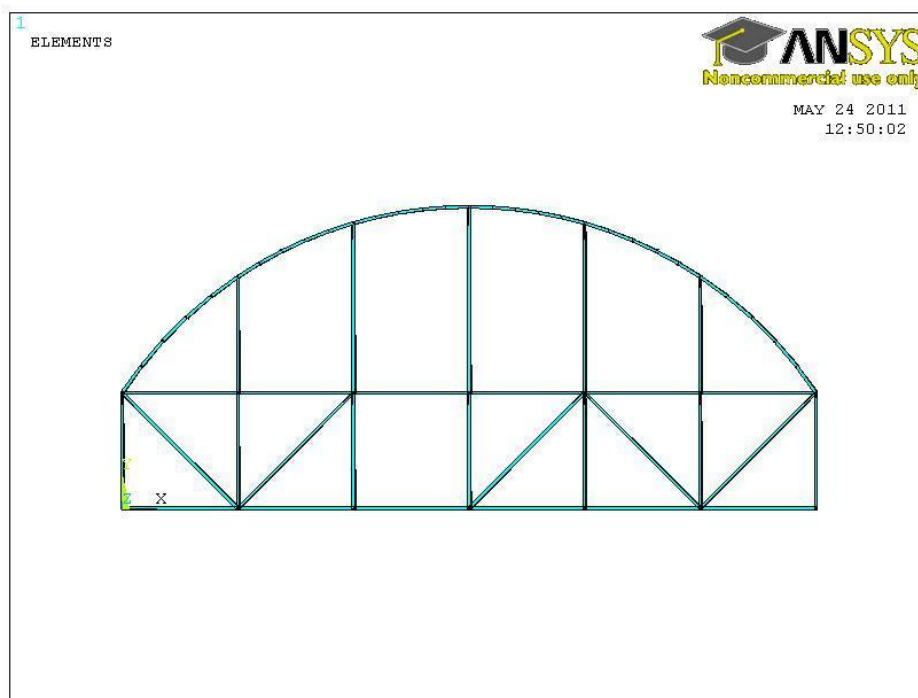
Obr. 45. Model prutové konstrukce se zavedeným pásem



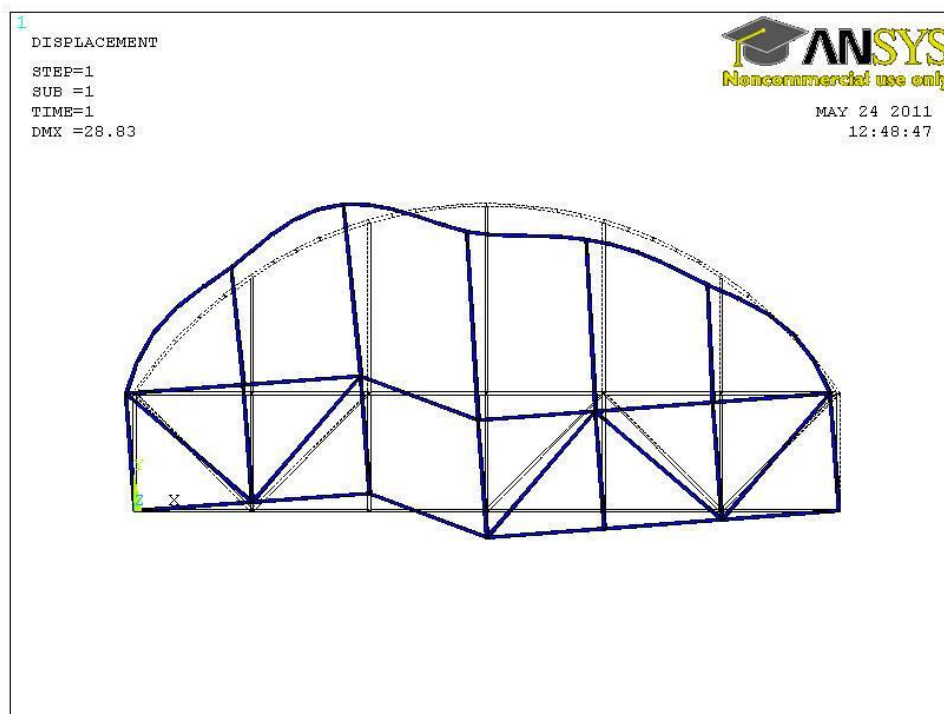
Obr. 46. Deformace prutové konstrukce se zavedeným pásem



Obr. 47. Velikost zatížení prutové konstrukce se zavedeným pásem

**Rekonstruovaná prutové konstrukce se zavedeným pásem:**

Obr. 48. Model rekonstruované prutové konstrukce se zavedeným pásem



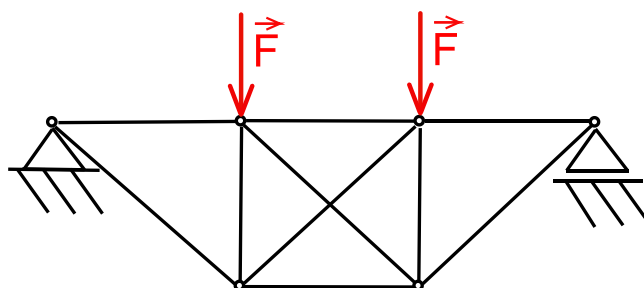
Obr. 49. Deformace rekonstruované prutové konstrukce se zavedeným pásem



Obr. 50. Velikost zatížení rekonstruované prutové konstrukce se zavedeným pásem

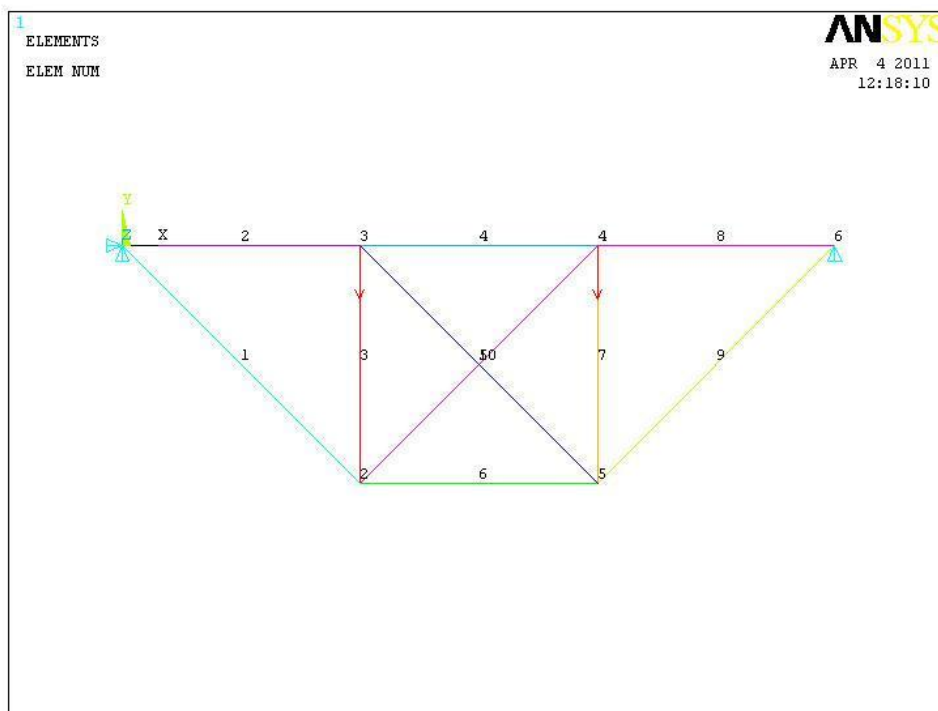
### 6.1.2. Staticky neurčitá konstrukce

Staticky neurčitá konstrukce dle Obr. 51. bude pro srovnání vyřešena numerickým a analytickým řešením.

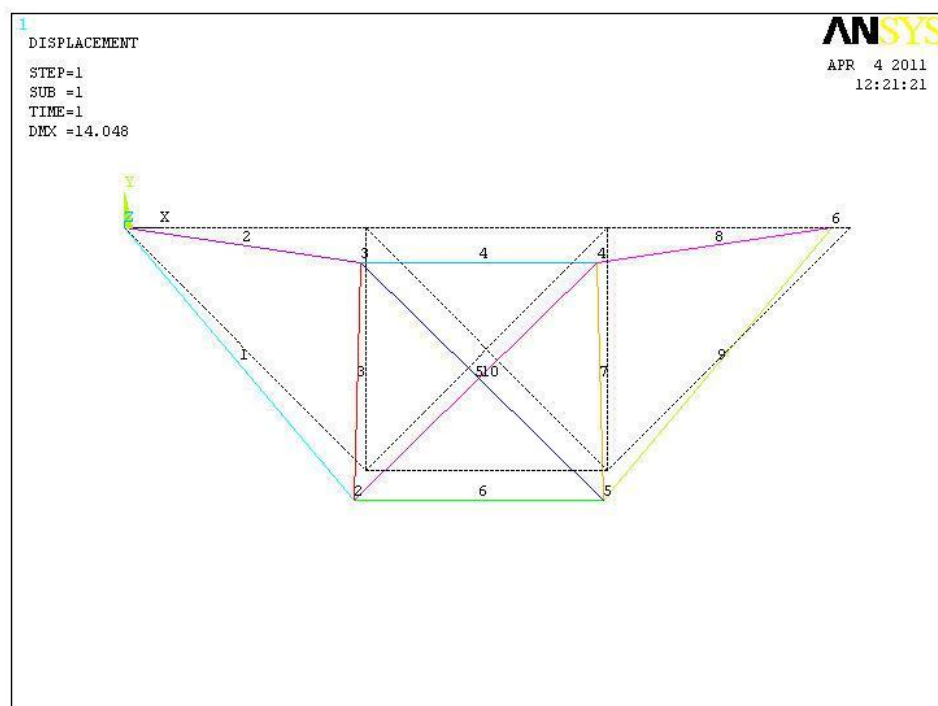


Obr. 51. Náčrt staticky neurčitá soustavy

### 6.1.2.1. Numerické řešení



Obr. 52. Staticky neurčitá konstrukce



Obr. 53. Deformovaná konstrukce

**Výsledné hodnoty:**

Zatížení v prutech

```

PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****
STAT   CURRENT
ELEM   SILA
1      14142.
2      -10000.
3      -7928.9
4      -7928.9
5      -2928.9
6      12071.
7      -7928.9
8      -10000.
9      14142.
10     -2928.9

MINIMUM VALUES
ELEM    8
VALUE  -10000.

MAXIMUM VALUES
ELEM    1
VALUE   14142.

```

Stykové síly

```

PRRSOL Command
File
PRINT F REACTION SOLUTIONS PER NODE
**** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING ****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE   FX      FY
1      -0.18190E-11 10000.
6      10000.

TOTAL VALUES
VALUE  -0.18190E-11 20000.

```

**6.1.2.2. Analytické řešení****Rozbor soustavy****Klasifikace vazeb:****Vnější vazby:**

$$1 - r.k.d. - \xi_i = 2$$

$$6 - o.k.d. - \xi_i = 1$$

**Vnitřní vazby:**

$$1,6 - r.k.d. - \xi_i = 2 \cdot 2$$

$$2,3,4,5 - r.k.d. - \xi_i = 4 \cdot 2$$

**Určení pohyblivosti:**

Počet styčníků:

$$\delta = 6$$

Počet členů = prutů + základní těleso:

$$p = 11$$

Celkem:

$$n = 17$$

Počet omezení deformačních parametrů:

$$\eta = 1$$

$$i = (n - 1)i_v - (\Sigma \xi_i - \eta) - \delta$$

$$i = (17 - 1)3 - (2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1) - 6 = 0$$

Prutová soustava je nepohyblivá.

**Statická určitost:**

a) vnější

$$v = \mu_A$$

$$3 = 3$$



b) vnitřní

$$2k - 3 = p$$

$$2 \cdot 6 - 3 = 10$$

$$9 \neq 10$$

Soustava je vnitřně staticky neurčitá.

**Statická podmínka rovnováhy:**

$$\Sigma F_x: F_{Ax} = 0$$

$$\Sigma F_y: F_{Ay} + F_{Fy} - F - F = 0$$

$$\Sigma M_{zA}: F_{Fy} 3l - F 2l - Fl = 0$$

$$F_{Ax} = 0N; F_{Ay} = 10kN; F_{Fy} = 10kN$$

**Sestavení rovnic soustavy:**

Styčnick 1)

$$x: \frac{\sqrt{2}}{2} F_1 + F_2 + F_{Ax} = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_1 + F_{Ay} = 0$$

Styčnick 2)

$$x: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_5 + F_6 = 0$$

$$y: \frac{\sqrt{2}}{2} F_1 + F_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_5 = 0$$

Styčnick 3)

$$x: -F_2 + F_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10} = 0$$

$$y: F_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10} - F = 0$$

Styčnick 4)

$$x: -F_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_5 + F_8 = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_5 - F_7 - F = 0$$

Styčnick 5)

$$x: -F_6 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_9 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10} = 0$$

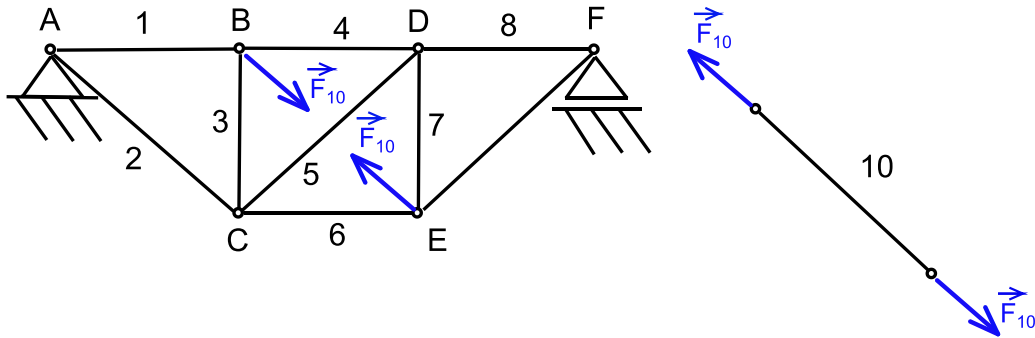
$$y: F_7 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_9 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{10} = 0$$

Styčnick 6)

$$x: -F_8 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_9 = 0$$

$$y: -\frac{\sqrt{2}}{2} F_9 + F_{Fy} = 0$$

Částečné uvolnění:



Deformační podmínka:  $u_B^I = u_B^{II}$

$$\frac{\partial W}{\partial F_{10}} = \sum_{i=1}^{10} \frac{F_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial F_i}{\partial F_{10}} = 0$$

Ze sestavených rovnic soustavy vyjádříme síly v prutech jako  $F_i = f(F_{10}, F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Fy}, F)$ .

Následně všechny rovnice derivujeme podle  $F_{10}$ .

$$F_1 = \sqrt{2}F_{Ay}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial F_{10}} = 0$$

$$F_2 = -F_{Ax} - F_{Ay}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial F_{10}} = 0$$

$$F_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F_{10} - F; \quad \frac{\partial F_3}{\partial F_{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_4 = -F_{Ax} - F_{Ay} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}; \quad \frac{\partial F_4}{\partial F_{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_5 = \sqrt{2}F_{Fy} + F_{10} - \sqrt{2}F; \quad \frac{\partial F_5}{\partial F_{10}} = 1$$

$$F_6 = F_{Fy} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}; \quad \frac{\partial F_6}{\partial F_{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_7 = -F_{Fy} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}; \quad \frac{\partial F_7}{\partial F_{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 F_8 &= F_{Fy} ; & \frac{\partial F_8}{\partial F_{10}} &= 0 \\
 F_9 &= \sqrt{2}F_{Fy} ; & \frac{\partial F_9}{\partial F_{10}} &= 0 \\
 F_{10} &= F_{10} ; & \frac{\partial F_{10}}{\partial F_{10}} &= 1
 \end{aligned}$$

Vyjádřené síly dosadíme do deformační podmínky a vyjádříme sílu  $F_{10}$ . Rovnice, které měli derivační hodnotu nulovou, nebudeme do rovnice dosazovat.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}F_{10} - F\right)l}{ES} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\left(-F_{Ax} - F_{Ay} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}\right)l}{ES} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \\
 & \frac{(\sqrt{2}F_{Fy} + F_{10} - \sqrt{2}F)(\sqrt{2}l)}{ES} (1) + \frac{\left(F_{Fy} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}\right)l}{ES} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \\
 & \frac{\left(-F_{Fy} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{10}\right)l}{ES} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{F_{10}\sqrt{2}l}{ES} (1) = 0
 \end{aligned}$$

Celou rovnici podělíme  $l, E, S$  a za pomoci statické podmínky rovnováhy vyjádříme stykové síly zatěžující silou  $F$ . Po celkové úpravě dostaneme rovnici:

$$F_{10} = -\frac{\sqrt{2}F}{2 + 2\sqrt{2}}$$

Po dosazení hodnot dostaneme výsledné hodnoty sil:

Prut	Velikost síly (N)	Prut	Velikost síly (N)
F1	14142	F6	12071
F2	-10000	F7	-7929
F3	-7929	F8	-10000
F4	-7929	F9	14142
F5	2929	F10	-2929

## Závěr

V první části této práce jsme se zabývali způsoby, jak lze dosáhnout rekonstrukce prutové soustavy. V hlavní části práce, kde byl posuzován vliv soustavy na odebírání jednotlivých prutů, bylo vyhodnoceno, že nelze zachovat nepohyblivost a nadměrné přetěžování konstrukce bez začlenění náhradních prvků. Tato změna byla posuzována změnou vazeb a začlenění prutu do soustavy. Na základě výpočtů lze dojít k závěru, že poloha začleněného prutu značně ovlivňuje zatížení soustavy.

Další částí byl vybrán jeden ze způsobu rekonstrukce, na kterém byly aplikovány možné metody řešení. Výpočty rekonstruované soustavy se prováděly analytickým i grafickým řešením. U některých metod řešení lze vidět, že výpočet je příliš pracný a zdlouhavý i pro jednoduché soustavy. Cílem také bylo ukázat, jak jednoduše lze provést výpočet prutové soustavy bez pomoci numerického řešení.

Tato soustava je také popsána svými výhodami a jednoduchostí v úvodě. V poslední části práce byly provedeny výpočty prutových soustav numerickým řešením za pomoci programu ANSYS. V jedné z konstrukcí byl proveden pro srovnání výpočet staticky neurčité soustavy numerickým i analytickým řešením.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] Staggered truss system. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 21 May 2010, last modified on 24 November 2006 [cit. 2011-05-14]. Dostupné z WWW: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Staggered\\_truss\\_system](http://en.wikipedia.org/wiki/Staggered_truss_system)>.
- [2] Karel Juliš, Otakar Tepřík, Adolf Slavík, STATIKA, 1987, SNTL – Nakladatelství technické literatury, n. p., s. 216, 04-229-87
- [3] Josef Šrejtr, Technická literature I Statika, leden 1954, SNTL – Nakladatelství technické literatury, n. p., s. 528, III-5-C3-L 11c
- [4] Karel Juliš, Rudolf Brepta, a kol, Mechanika I. Statika a kinematika, 1986, SNTL – Nakladatelství technické literatury, n.p., s. 480, 04-224-86
- [5] *Konstrukce a stavba letadel - Dusan Slavětinský starší - Příhradové konstrukce* [online]. 2006-10-29, 2010-4-25 [cit. 2011-05-22]. Příhradové konstrukce. Dostupné z WWW: <[http://www.slavetind.cz/stavba/St\\_mechanika/Prihradovekonstrukce.aspx](http://www.slavetind.cz/stavba/St_mechanika/Prihradovekonstrukce.aspx)>.
- [6] *Trusses.pdf. (application/pdf ojekt)* [online]. 2001, May 2009 [cit. 2011-05-22]. Trusses – Theory and in LEGO. Dostupné z WWW: <<http://www.texbrick.com/articles/trusses.pdf>>.
- [7] *ENCYKLOPEDIE MOSTŮ* [online]. 1993, 2000 [cit. 2011-05-22]. IVANČICKÝ VIADUKT-MORAVSKÉ BRÁNICE-DOLNÍ KOUNICE. Dostupné z WWW: <<http://libri.cz/databaze/mosty/heslo.php?id=359>>.
- [8] *Turistika.cz* [online]. 2007, 2011 [cit. 2011-05-22]. Brno - ústřední autobusové nádraží Zvonařka. Dostupné z WWW: <<http://www.turistika.cz/mista/brno-ustredni-autobusove-nadrazi-zvonarka>>.
- [9] *Řešení rovinných prutových soustav pomocí metody konečných prvků* [online]. 2000 [cit. 2011-05-22]. Lekce MKP. Dostupné z WWW: <[http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~sidlof/vyuka/LA1/Materialy%20k%20prednaskam%20%28cesky%29/10\\_lekce\\_MKP\\_Konzola\\_071104\\_AnP.pdf](http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~sidlof/vyuka/LA1/Materialy%20k%20prednaskam%20%28cesky%29/10_lekce_MKP_Konzola_071104_AnP.pdf)>.

[10] Přemysl Janíček, Emanuel Ondráček, Jan Vrbka, Jiří Burša, MECHANIKA TĚLES  
Pružnost a pevnost I, březen 2004, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, s.287.,  
ISBN 80-214-2592-X

## Seznam použitých veličin

Veličina	Symbol	Jednotka
Síla	$F$	[N]
Posunutí	$u, w$	[m]
Energie napjatosti	$W$	[J]
Pohyblivost	$i$	[°]
Délka	$l$	[m]
Plocha	$S$	[m <sup>2</sup> ]
Modul pružnosti v tahu	$E$	[Pa]
Silový poměr	$\kappa$	[-]
Ohybový moment	$M_y$	[Nm]
Poissonovo číslo	$\varepsilon$	[-]
Kritická vzpěrná síla	$F_{kr}$	[N]
Kvadratický moment	$J_y$	[m <sup>4</sup> ]
Štíhlost prutu	$\lambda_K$	[-]
Mez napětí v kluzu	$\sigma_K$	[Pa]
Dovolené napětí	$\sigma_{Rd}$	[Pa]